Der Goldene Schnitt hat seit Jahrtausenden in Mathematik und Kunst eine bedeutende Rolle gespielt. Im Mittelpunkt des Seminars stehen außergewöhnliche und faszinierende Eigenschaften des Goldenen Schnitts im elementarmathematischen Bereich.
Die zugrunde gelegten Bücher enthalten darüber hinaus eine Fülle von Beispielen aus Natur und Kunst.

Literatur: Albrecht Beutelsbacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt, 2., überarbeitete und erweiterte Auflage, Spektrum Verlag 1996
Hans Walser: Der Goldene Schnitt (4.Aufl.), Leipzig 2004

1. Der Goldene Schnitt

Der Goldene Schnitt wird oft als Inbegriff eines ästhetischen Verhältnisses zweier Größen (lat. *proportio divina, göttliches Verhältnis*) angesehen:

Ein Ganzes wird im Verhältnis des Goldenen Schnitts geteilt, wenn sich das Ganze zum größeren Teil verhält wie der größere zum kleineren Teil.

Das bedeutet für Strecken: *Zwei Strecken stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts, wenn sich die größere zur kleineren Strecke verhält wie die Summe aus beiden zur größeren.*

Übersetzung in die Formelsprache: M = Maior (größerer Teil), m = Minor (kleinerer Teil)

Grundformel des Goldenen Schnitts als Verhältnisgleichung $\frac{\mathbf{M}}{\mathbf{m}} = \frac{\mathbf{M+m}}{\mathbf{M}}.$

Grundformel des Goldenen Schnitts als Produktgleichung $\mathbf{M^2 = (M + m) \cdot m}$

In Worten: Das Quadrat über dem Maior ist flächengleich zum Rechteck, gebildet aus der ganzen Strecke und dem Minor.

Inkommensurabilität von Maior und Minor:
Wird eine Strecke im Goldenen Schnitt geteilt, dann gibt es kein gemeinsames Maß für den Maior und den Minor.
Indirekter Beweis mit Hilfe der Zahleigenschaften gerade/ungerade: Angenommen es gäbe ein gemeinsames Maß, folglich auch ein größtes gemeinsames Maß e, mit dem man beide Strecken messen kann, d.h. $M = p \cdot e$ und $m = q \cdot e$ mit natürlichen Zahlen p und q, die keinen gemeinsamen Teiler mehr haben, insbesondere nicht beide gerade sind. Dann kann man das Quadrat über dem Maior und das Rechteck aus ganzer Strecke und Minor mit dem Quadrat der Länge e auslegen und für die Maßzahlen p und q folgt aus der Grundformel (Produktgleichung): $p^2 = (p + q) \cdot q$.
Diese Gleichung ist aber nicht erfüllbar, wenn mindestens eine der Zahlen p und q ungerade ist.

2. Eigenschaften der Verhältniszahl Φ

Das **Verhältnis als Zahl** zu begreifen, ist der nächste Schritt: $\Phi = \frac{M}{m}$ (griech. Großbuchstabe Phi).
Der **Kehrwert** der Verhältniszahl Φ sei φ (griech. Kleinbuchstabe phi).

1) Die Inkommensurabilität von Maior und Minor ist gleichbedeutend mit der **Irrationalität** der Zahlen Φ und φ.

2) Aus der Grundformel als Verhältnisgleichung ergibt sich dann für Φ die **Bruchgleichung** $\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}$. Hieraus folgt, dass Φ zwischen 1 und 2 liegen muss.
3) Die Bruchgleichung umformuliert besagt: $\Phi = 1 + \varphi$,
   in Worten: Φ und φ unterscheiden sich um 1, ihre Nachkommastellen sind gleich.
4) Aus der Bruchgleichung ergibt sich die **quadratische Gleichung** $\Phi^2 = \Phi + 1$.
   Die positive Lösung der quadratischen Gleichung ist $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618\,...$
5) Der Kehrwert φ ist die positive Lösung der quadratischen Gleichung $1 = \varphi + \varphi^2$,
   also $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}618\,...$
6) Für die **Potenzen** von Φ gilt: $\Phi^{n-1} + \Phi^n = \Phi^{n+1}$für alle ganzen Zahlen n.

3. Konstruktion des Goldenen Schnitts mit Zirkel und Lineal

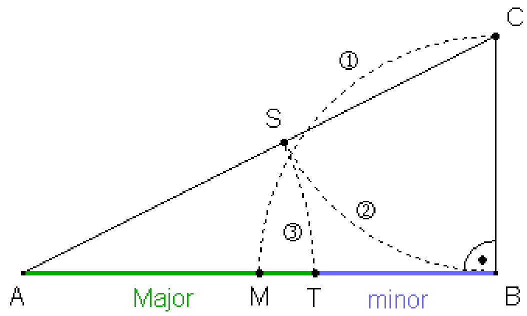
Man unterscheidet die **innere Teilung** und die **äußere Teilung** einer Strecke a. Das Teilverhältnis sei mit τ (griech. Kleinbuchstabe tau) bezeichnet.

Bei der inneren Teilung ist ein Teilpunkt im Innern der Strecke a gesucht, so dass sich die ganze Strecke a zu einer Teilstrecke verhält wie τ.
Im Falle des Goldenen Schnitts ist also die ganze Strecke gegeben: $a = M + m$;
gesucht ist der Maior: $x = M$. Es gilt $x = \varphi \cdot a = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{1}{2}a$.

Bei der äußeren Teilung ist ein Teilpunkt auf der Verlängerung der Strecke a gesucht, so dass sich die verlängerte Strecke zu der Strecke a verhält wie τ.
Im Falle des Goldenen Schnitts ist also der Maior gegeben: $a = M$;
gesucht ist die ganze Strecke $x = M + m$. Es gilt $x = \Phi \cdot a = \frac{\sqrt{5}}{2}a + \frac{1}{2}a$

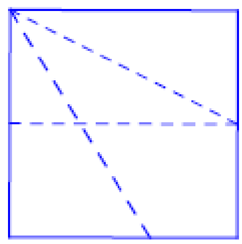
Die Konstruktion der inneren oder äußeren Teilung ist also mit der Konstruktion von $\sqrt{5}$ bzw. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ verbunden.

Wegen $\sqrt{5} = \sqrt{1^2 + 2^2}$ bzw. $\frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2}$ liegt die Benutzung des Satzes von Pythagoras bei der Konstruktion nahe. Eine mögliche Konstruktion einer inneren Teilung ist die nebenstehende.



Über 20 derartige Konstruktionen in http://www.dr-bernhard-peter.de/Goldsch/seite74.htm .

Wie man durch **Falten** eine Strecke a im Innern nach dem Goldenen Schnitt teilen kann, gibt die folgende Handlungsanweisung an. Die Konstruktion lässt sich auch mit Zirkel und Lineal durchführen.

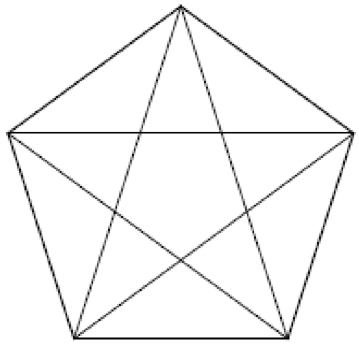


(i) Nimm ein Quadrat mit der Seitenlänge a. Falte die obere Kante auf die untere entlang der Mittellinie. und klappe wieder auf.
(ii) Falte das obere Rechteck entlang der Diagonale durch die linke obere Quadratecke und klappe wieder auf.
(iii) Falte die linke Quadratseite auf diese Diagonale entlang der Winkel halbierenden von Quadratseite und Diagonale.

Diese Winkelhalbierende teilt die untere Quadratseite im Goldenen Schnitt. Warum?

4. Das regelmäßige Fünfeck

„Die" **Definition**: Welche **Eigenschaften** definieren ein regelmäßiges Fünfeck (Pentagon)?



A) Die 5 **Seiten** sind gleichlang und die 5 **Winkel** sind gleichgroß.
   Reicht eine der beiden Bedingungen? Ist ein Fünfeck mit 5 gleichlangen Seiten bzw. mit 5 gleichgroßen Winkeln notwendig regelmäßig?

B) Alle 5 Ecken liegen auf einem Kreis (**Umkreis**) und ...
   Ist ein Fünfeck mit einem Umkreis und 5 gleichlangen Seiten bzw. mit einem Umkreis und mit 5 gleichgroßen Winkeln notwendig regelmäßig?

C) Es hat 5 **Achsensymmetrien** und 5 **Drehsymmetrien**.
   Reicht eine der beiden Bedingungen? Ist ein Fünfeck mit 5 Achsensymmetrien bzw. mit 5 Drehsymmetrien notwendig regelmäßig?

Die Diagonalen eines regelmäßigen Fünfecks bilden einen **Fünfeck-Stern** (Pentagramm). Im „Innern" des Fünfeck-Sterns ergibt sich ein kleineres regelmäßiges Fünfeck. Betrachte die Gesamtfigur **„Fünfeck-Stern-Fünfeck".**

Entdeckungen am „Fünfeck-Stern-Fünfeck":

1) **Dreiecke**: Wie viele siehst du? Ordne sie
   a) nach Kongruenz: Wie viele Varianten von nicht-kongruenten Dreiecken gibt es?
   b) nach Ähnlichkeit: Wie viele Varianten von nicht-ähnlichen Dreiecken gibt es?
   Was müsstest du zeigen, um zu beweisen, dass die Dreiecke derselben Variante kongruent bzw. ähnlich sind?

2) **Winkel**: **Ordnet man alle vorkommenden Winkel der Größe nach, so ist die Differenz benachbarter Winkel immer 36°.**
   Welche Kenntnisse über das regelmäßige Fünfeck und welche Winkelsätze benutzt du zum Beweis dieses Satzes? Beweise mit Hilfe dieses Satzes die Vermutungen von 1).

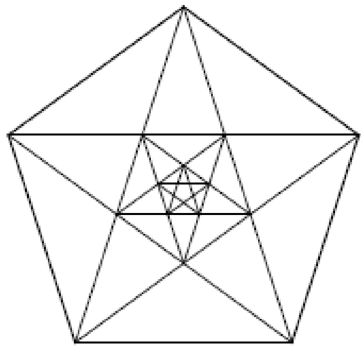
3) **Strecken**:
   a) Jede Diagonale ist parallel zu einer Fünfeck-Seite.
   b) **Ordnet man alle vorkommenden Strecken der Größe nach, so ist das Verhältnis benachbarter Strecken immer gleich.**
      Welche Kenntnisse über das regelmäßige Fünfeck und welche Sätze (Sätze über Parallelen, Kongruenzsätze) benutzt du zum Beweis dieser beiden Aussagen?

„Goldene" Eigenschaften:

- **Das regelmäßige Fünfeck und der Goldene Schnitt**: **Die Diagonale und die Seite des regelmäßigen Fünfecks stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.**
- **Goldene Dreiecke**:
  - Ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem die Schenkel zur Basis im Verhältnis des Goldenen Schnitts stehen, heißt **spitzes** Goldenes Dreieck. In einem spitzen Goldenen Dreieck ist der Winkel an der Spitze halb so groß wie ein Basiswinkel.
  - Ein gleichschenkliges Dreieck, bei dem die Basis zu den Schenkeln im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht, heißt **stumpfes** Goldenes Dreieck. In einem stumpfen Goldenen Dreieck ist der Winkel an der Spitze dreimal so groß wie ein Basiswinkel.

Inkommensurabilität bzw. Irrationalität

Mit Hilfe des „Fünfeck-Stern-Fünfecks“ und seiner gedachten unendlichen Fortsetzung bewiesen die Griechen vor etwa 2500 Jahren die **Inkommensurabilität von Maior und Minor** bzw. die **Irrationalität der Goldenen Schnittzahl**:
Es gibt kein gemeinsames Maß für die Seite und die Diagonale des regelmäßigen Fünfecks.

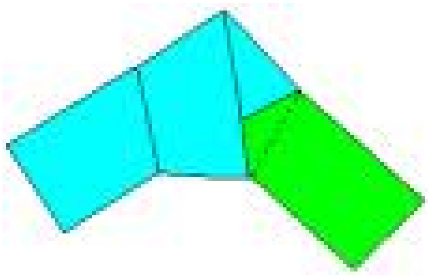


5. Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks

1) **Konstruktion mit dem Geodreieck** (Lineal und Winkelmesser):
Gegebene Größe (Bestimmungsstück): Seitenlänge a (oder Länge d der Diagonale) des Fünfecks. Benötigte Information: Im regelmäßigen Fünfeck betragen alle Innenwinkel 108°.
Konstruktionsbeschreibung: Zeichne eine Strecke der Länge a. Trage in beiden Endpunkten zur selben Seite hin jeweils im Winkel von 108° eine Strecke der Länge a ab. Trage an einem der neuen Endpunkte im Winkel von 108° eine Strecke der Länge a ab. Verbinde die beiden Endpunkte des erhaltenen Streckenzugs.

2) **Konstruktion mit Zirkel und Lineal** (d.h. ohne Winkelmesser):
Gegebene Größe (Bestimmungsstück): Seitenlänge a (oder Länge d der Diagonale) des Fünfecks. Benötigte Information: Die Diagonale und die Seite des regelmäßigen Fünfecks stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts.
Konstruktionsbeschreibung: Zeichne eine Strecke der Länge a. Konstruiere nach einem der Konstruktionsverfahren von Kap. 3 eine Strecke d, die zu a im Verhältnis des Goldenen Schnitts steht: $\mathrm{d} = \Phi \cdot \mathrm{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{a} + \frac{1}{2}\mathrm{a}$. Konstruiere nun mit Hilfe von a und d und der üblichen Dreieckskonstruktion SSS die Eckpunkte des regelmäßigen Fünfecks.

3) **Konstruktion durch Papierfalten**:
(Gegebene Größe: Abstand von Seite und paralleler Diagonale des Fünfecks.)
Konstruktionsbeschreibung: Nimm einen langen, schmalen Papierstreifen, mache vorsichtig einen einfachen Knoten (ziehe ihn so fest, wie es geht, ohne dass er reißt) und drücke ihn platt. Fertig!
Wenn du eine Kokarde haben willst, dann falte eines der Endstücke des Streifens noch einmal an einer Seite des Fünfecks um. Halte die Kokarde gegen das Licht: Du siehst im Inneren des Fünfeck-Knotens einen Fünfeck-Stern.



Nachweis der Richtigkeit des „Augenscheinlichen“:
Vorbetrachtungen: Löse den Knoten wieder auf; du erkennst, dass die Faltlinien vier kongruente Trapeze erzeugt haben. Diese Trapeze sind (a) symmetrisch (also gleichschenklig); (b) ihre Schenkel sind so lang wie die kürzere Grundseite des Trapezes; (c) ihre Diagonalen sind so lang wie die längere Grundseite.
Spießumkehr: Auf einem Papierstreifen befinden sich versetzt aneinander vier kongruente Trapeze mit den Eigenschaften (a), (b), (c). Falte den Streifen nacheinander entlang der gemeinsamen Schenkel zweier benachbarter Trapeze. Die vier übereinanderliegenden Trapeze bilden dann ein regelmäßiges Fünfeck.

Nachweis der Richtigkeit der Behauptung:
i) Ein Trapez mit den Eigenschaften (a), (b), (c) wird durch eine Diagonale in eine spit zes und ein stumpfes Goldenes Dreieck zerlegt. (Beweis über Winkel)
ii) Beim Falten zweier benachbarter Trapeze (= Spiegeln eines der beiden Trapeze) an dem gemeinsamen Schenkel entsteht ein regelmäßiges Fünfeck. (Beweis mit Hilfe von i)
iii) Die Hintereinanderausführung des Faltens erzeugt übereinander liegende kongruente Fünfecke. (Warum?)

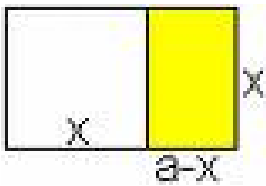
6. Goldenes Rechteck, Goldene Spirale, spira mirabilis

1) Goldenes Rechteck

Die bekanntesten **Rechteck-Formate** sind das DIN A-Format und das Goldene Format.

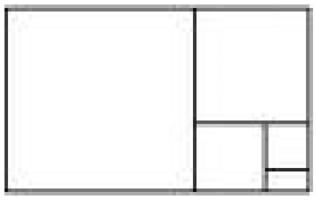
a) Das **DIN A-Format** ist definiert durch:
(i) Alle Rechtecke im DIN A-Format sind zueinander ähnlich.
(ii) Halbierung des Rechtecks im DIN An-Format entlang der längeren Seite ergibt das Rechteck im DIN A(n+1)-Format.
(iii) Das Rechteck im DIN A0-Format hat den Flächeninhalt $1m^2$.
Folgerung aus (i) und (ii): Das Seitenverhältnis im DIN A-Format beträgt $\sqrt{2}:1$.

b) Das **Goldene Format** ist definiert durch:
(i) Alle Rechtecke im Goldenen Format sind zueinander ähnlich.
(ii) Durch Abtrennung des größtmöglichen Quadrats von einem Rechteck im Goldenen Format entsteht wieder ein Rechteck im Goldenen Format.
Folgerung aus: Das Seitenverhältnis im Goldenen Format beträgt Φ : 1.



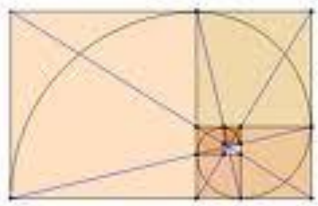
2) Goldene Spirale

a) **Von Goldenem Rechteck zu Goldenem Rechteck – endlos**:
Starte mit einem Goldenen Rechteck mit der längeren Seitenlänge 1. Bilde eine Folge von weiteren Goldenen Rechtecken, indem du fortgesetzt im Rhythmus rechts – oben – links – unten – rechts – ... das jeweils größtmögliche Quadrat abtrennst.



(i) Die Quadrate haben fortlaufend die Seitenlänge φ, φ^2, φ^3, ...
(ii) Die Quadrate schöpfen das Start-Rechteck aus. Also gilt $\varphi = \varphi^2 + \varphi^4 + \varphi^6 + \cdots$. (Probe durch geometrische Reihe)

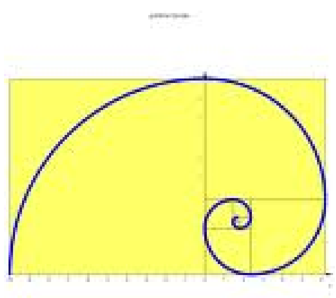
b) Vom Goldenen Rechteck zu **Spiralen im Rechteck**:
Zeichne in die Quadrate von a) um einen Eckpunkt **Viertelkreise** so ein, dass eine durchgehende Kurve entsteht. Sie hat die Form einer Spirale, die sich in einen Punkt O hineindreht.



(i) O ist der Schnittpunkt zweier entsprechender Diagonalen aufeinanderfolgender Goldener Rechtecke.
(ii) Die Endpunkte der Viertelkreise gehen durch Drehstreckung um das Zentrum 0 mit dem (absoluten) Drehwinkel 90° $(=\frac{\pi}{2})$ und dem Streckfaktor φ (wenn man in das Zentrum hineindreht) bzw. Φ (wenn an nach außen dreht) ineinander über.

c) Die **Goldene Spirale**:

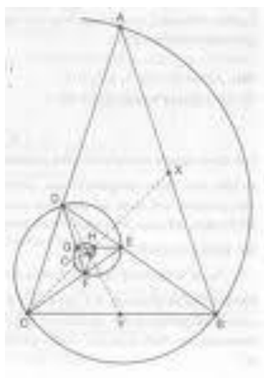
Eine (logarithmische) Spirale wird in Polarkoordinaten (r,α) durch die Gleichung $r(\alpha) = a \cdot b^{\alpha}$ beschrieben. Die Spirale, die für die Winkel $\alpha = m \cdot \frac{\pi}{2}$ den Wert $r = \Phi^{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, annimmt, heißt Goldene Spirale. Im Gegensatz zur „Viertelkreis-Spirale" springt ihre Krümmung nicht an den Enden der Viertelkreise. Die „Viertelkreis-Spirale" ist eine gute Approximation der Goldenen Spirale.



3) Spira mirabilis

Starte mit einem **spitzen Goldenen Dreieck** mit der Schenkellänge 1. Bilde eine Folge von weiteren spitzen Goldenen Dreiecken, indem du fortgesetzt das **stumpfe Goldene Dreieck** davon abtrennst, das den rechten Schenkel des spitzen Dreiecks als Basis hat.

Zeichne um die Spitzen der stumpfen Goldenen Dreiecke **Kreisbögen** durch die Eckpunkte ihrer Basis so ein, dass eine durchgehende Kurve entsteht. Sie hat die Form einer Spirale, die sich in einen Punkt O hineindreht.



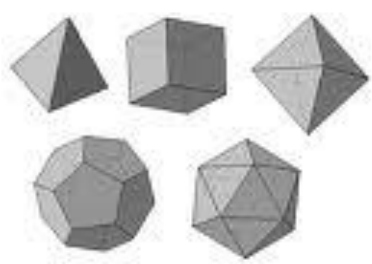
(i) O ist der Schnittpunkt der Verbindungen von linkem Basis-Eckpunkt und rechter Schenkel-Mitte zweier aufeinanderfolgender spitzer Goldener Dreiecke.

(ii) Die Endpunkte der Kreisbögen gehen durch Drehstreckung um das Zentrum 0 mit dem (absoluten) Drehwinkel 108° $(=\frac{3\pi}{5})$ und dem Streckfaktor φ (wenn man in das Zentrum hineindreht) bzw. Φ (wenn an nach außen dreht) ineinander über.

Die (logarithmische) Spirale, die für die Winkel $\alpha = m \cdot \frac{3\pi}{5}$ den Wert $r = \Phi^{m}$, $m \in \mathbb{Z}$, annimmt, heißt spira mirabilis. Im Gegensatz zur „Kreisbogen-Spirale" springt ihre Krümmung nicht an den Enden der Kreisbögen. Die „Kreisbogen-Spirale" ist eine gute Approximation der spira mirabilis.

7. Platonische Körper

Platonische Körper sind dadurch charakterisiert, dass ihre Oberfläche aus jeweils kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht, von denen an jeder Ecke gleichviele aneinander stoßen. Um eine Raumecke zu bilden, müssen mindestens drei regelmäßige Vielecke aneinander stoßen und es können nur Dreiecke, Vierecke oder Fünfecke sein, folglich von den Vier- und Fünfecken jeweils nur drei, von den Dreiecken jeweils drei, vier oder fünf. Es gibt demnach fünf Platonische Körper, (hier nach der Anzahl der Flächen aufgelistet): **Tetraeder**, **Würfel** (Hexaeder), **Oktaeder**, **Dodekaeder**, **Ikosaeder**.

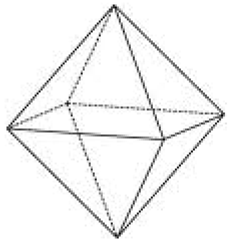


Anzahl der	Tetraeder	Würfel	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
Flächen	4	6	8	12	20
Ecken	4	8	6	20	12
Kanten	6	12	12	30	30

Es gilt: **Flächenzahl + Eckenzahl – Kantenzahl = 2 (Eulersche Polyederformel).**

Verbindet man die Mittelpunkte benachbarter Seitenflächen eines Platonischen Körpers, erhält man wieder einen Platonischen Körper, den sog. **dualen** Körper. Würfel und Oktaeder sind zueinander dual, Dodekaeder und Ikosaeder ebenfalls, das Tetraeder ist zu sich selbst dual.

Oktaeder und Quadrate



Die 6 Ecken eines Oktaeders sind die 6 Ecken dreier kongruenter Quadrate, die paarweise senkrecht aufeinander stehen. Ihre 12 Kanten bilden die 12 Kanten des Oktaeders.

Ikosaeder und Goldene Rechtecke

Die 12 Ecken eines Ikosaeders sind die 12 Ecken dreier kongruenter Goldener Rechtecke, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Der Nachweis basiert auf zwei Eigenschaften des Ikosaeders:

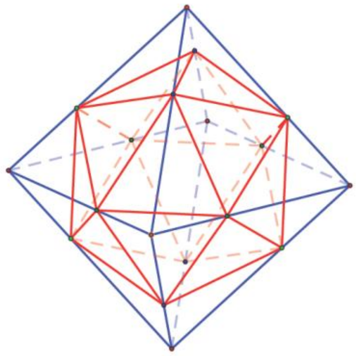
(i) Die fünf an einer Ecke aneinander stoßenden gleichseitigen Dreiecke bilden eine Pyramide, deren Grundfläche ein regelmäßiges Fünfeck ist.

(ii) Je zwei parallele Kanten des Ikosaeders gehören zu einem Rechteck, dessen längere Seiten Diagonalen in je einem der Fünfecke gemäß (i) sind.

Dodekaeder und Goldene Rechtecke

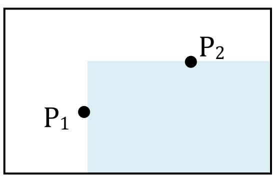
Die 12 Mittelpunkte der Fünfeckflächen eines Dodekaeders sind die 12 Ecken dreier kongruenter Goldener Rechtecke, die paarweise senkrecht aufeinander stehen.

Oktaeder und Ikosaeder



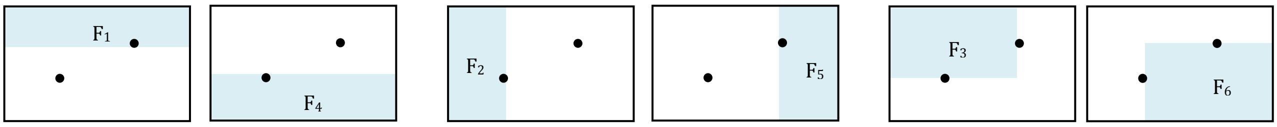
In ein Oktaeder kann ein Ikosaeder so einbeschrieben werden, dass die Ecken des Ikosaeders die Kanten des Oktaeders im Goldenen Schnitt teilen.
Der Nachweis basiert auf dem Satz über
Quadrat und Goldenes Rechteck :
In ein Quadrat kann man ein Goldenes Rechteck so einbeschreiben, dass die Ecken des Goldenen Rechtecks die Seiten des Quadrats im Goldenen Schnitt teilen.

8. Minimale Maximalflächen



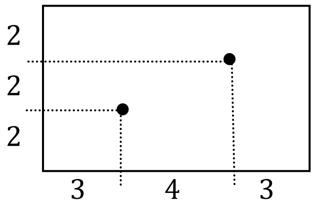
Die Situation:
Gegeben ist ein Rechteck und im Innern zwei Punkte P_1 und P_2 („Störpunkte"). Hieraus wird ein möglichst großes Rechteck ohne die beiden Störpunkte ausgeschnitten, dessen Seiten parallel zum Ausgangsrechteck sind.

Die Frage:
Bei welcher Lage der Störpunkte ist die (größtmögliche) ausgeschnittene Fläche am kleinsten?

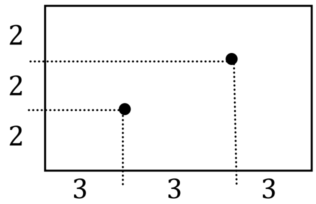


Vorüberlegung:
Wir können davon ausgehen, dass im Lösungsfall P_1 und P_2 punktsymmetrisch zum Mittelpunkt des Recktecks liegen, also F_1 und F_4 bzw. F_2 und F_5 und folglich F_3 und F_6 gleich groß sind; denn es gibt kein Argument, eine Richtung zu bevorzugen.

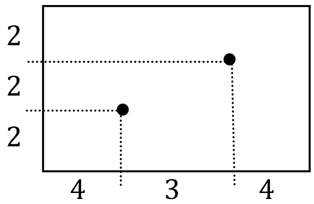
Beispiele: Berechne jeweils den Anteil von F_1, F_2 und F_3 an der Gesamtfläche.



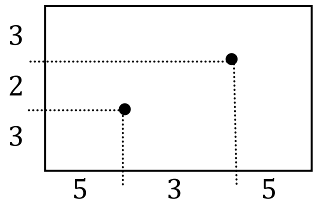
Anteil		
F_1	F_2	F_3
0,33	0,3	0,47



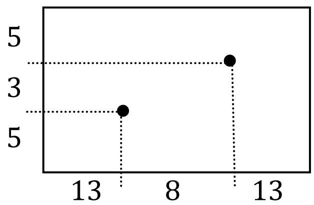
Anteil		
F_1	F_2	F_3
0,33	0,33	0,44



Anteil		
F_1	F_2	F_3
0,33	0,36	0,42



Anteil		
F_1	F_2	F_3
0,375	0,385	0,385

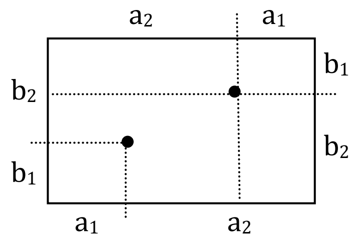


Anteil		
F_1	F_2	F_3
0,385	0,382	0,380

Was fällt auf?
Je näher die Flächenanteile beieinander liegen, umso kleiner wird die größtmögliche ausgeschnittene Fläche.

Die Lösung.

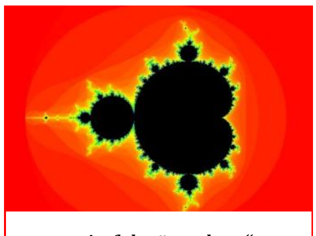
Die größtmögliche ausgeschnittene Fläche ist am kleinsten, wenn F_1, F_2 und F_3 gleich groß sind. Warum?
(Tipp: Wackele an P_1 – und damit auch an P_2 – und zeige, dass die größtmögliche ausgeschnittene Fläche dann größer wird.)



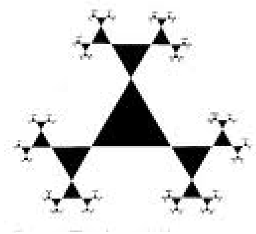
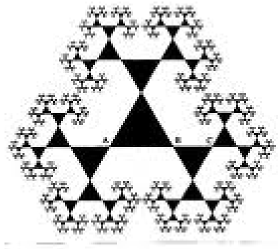
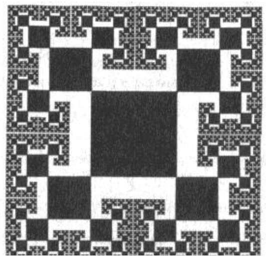
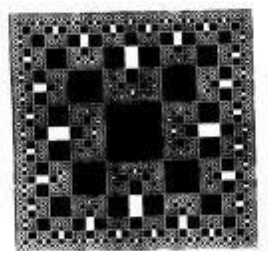
Sei $a_1 < a_2$, $a = a_1 + a_2$, $b_1 < b_2$, $b = b_1 + b_2$. Berechne F_1, F_2 und F_3.
Aus $F_1 = F_2 = F_3$ folgt $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$ und $a_2 : a_1 = a : a_2 = \Phi$!!!

9. Fraktale

Unter Fraktalen verstehen wir Figuren, die **Selbstähnlichkeiten** aufweisen, d.h. bei denen Teilfiguren eine verkleinerte Kopie der Gesamtfigur sind, Der Fraktalbegriff wurde von Benoît Mandelbrot geprägt. (H.Walser)


„Apfelmännchen"
(Benoît Mandelbrot)

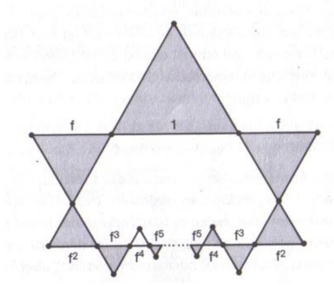
Fraktale entstehen zum Beispiel so: Wir gehen von einer einfachen geometrischen Figur aus (z.B. gleichseitiges Dreieck, Quadrat) und zeichnen an die Ecken dieser Figur weitere gleichartige Figuren, die allerdings um einen bestimmten Faktor f (f<1) gegenüber der Ausgangsfigur verkleinert sind. An deren freien Ecken wiederholen wir dann diesen Vorgang und kommen Schritt für Schritt zu immer feineren Verästelungen. (A. Beutelspacher)

Dreiecksfraktal Quadratfraktal
mit Lücken im Grenzfall im Grenzfall mit exakter Überlappung

Bei diesem Iterationsprozess können zwischen den Verästelungen größere **Lücken** (1. Bild) oder **Überlappungen** (4. Bild) entstehen.

Frage: Wie groß ist der Verkleinerungsfaktor f im **Grenzfall**, wenn sich die Äste gerade noch nicht überlappen (2. und 3. Bild)?



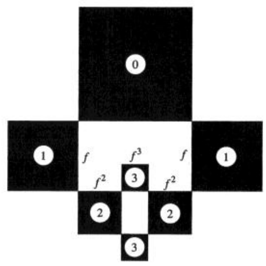
Im Fall des **Dreiecksfraktals** (2. Bild) muss dann gelten (vgl. 5. Bild):

$$f + 1 = f^2 + 2 \cdot (f^3 + f^4 + f^5 + \cdots) = f^2 + 2 \cdot f^3(1 + f + f^2 + \cdots) = f^2 + 2 \cdot f^3 \cdot \frac{1}{1-f}.$$

Elementare Termumformung führt zu der kubischen Gleichung $f^3 + 2 \cdot f^2 - 1 = 0$. Durch Raten findet man die Lösung: $f = -1$. Nach Polynomdivision $(f^3 + 2 \cdot f^2 - 1) : (f + 1) = f^2 + f - 1$ ergeben sich die restlichen beiden Lösungen als Lösungen der quadratischen Gleichung $f^2 + f - 1 = 0$, nämlich $-\Phi$ und φ.

Da als Verkleinerungsfaktor nur eine positive Zahl infrage kommt, heißt die Antwort auf die Frage also: Der Grenzfall tritt beim Verkleinerungsfaktor φ auf.

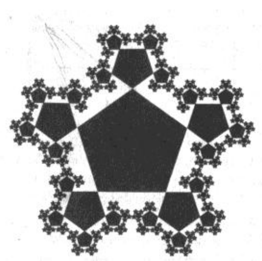
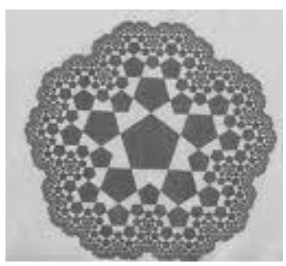
Beim **Quadratfraktal** (3. Bild) ist der Verkleinerungsfaktor im Grenzfall ½. Der Beweis verläuft analog zum Dreiecksfraktal.



Folglich treten bei Verkleinerungsfaktoren zwischen ½und 1 Überlappungen ein. Dabei gibt es Fälle, bei denen die Überlappung „aufgeht", d.h. dass Quadrate aus benachbarten Verästelungen zur Deckung kommen (4. Bild). Das kann frühestens in der 3. Generation der Fall sein (6. Bild). Analoge Überlegungen wie beim Dreiecksfraktal führen auf dieselbe kubische Gleichung. Also finden beim Verkleinerungsfaktor φ im Quadratfraktal ab der 3. Generation exakte Überlappungen statt.

Durch analoge Überlegungen erhält man:

Beim **Fünfecksfraktal** (7. Bild) ist der Verkleinerungsfaktor im Grenzfall (gerade noch keine Überlappung) φ^2. Beim Verkleinerungsfaktor φ finden ab der 2. Generation exakte Überlappungen statt (8. Bild).

Fünfecksfraktal
im Grenzfall mit exakter Überlappung

10. Φ und Fibonacci

Die **Fibonacci-Zahlen**, benannt nach Leonardo von Pisa (1180-1241), dem Sohn des Bonaccio (filius bonacii), sind wohl die bekannteste Zahlenfolge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Ihre definierende Eigenschaft ist: Ausgehend von 1 und 1, bilde fortlaufend eine neue Zahl als Summe der beiden vorherigen. Also $f_1 = 1$, $f_2 = 1$, $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Eine Verallgemeinerung bilden die **Lucas-Folgen** $<a_n>$ mit demselben Bildungsgesetz, aber beliebigen Anfangswerten: a_1 , a_2, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n \in \mathbb{N}$. Es gilt: $a_{n+2} = f_{n+1} \cdot a_2 + f_n \cdot a_1$, $n \in \mathbb{N}$.

Für die **Potenzen von Φ** gilt: $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$ für alle ganzen Zahlen n (Kap.2). Trennen wir nach positiven und negativen Exponenten, dann bedeutet diese Formel: $<\Phi^n>$ ist eine Lucas-Folge mit den Anfangswerten Φ und Φ^2 und $<(-\varphi)^n>$ ist eine Lucas-Folge mit den Anfangswerten $(-\varphi)$ und $(-\varphi)^2$. Also gilt: $\Phi^{n+2} = f_{n+1} \cdot \Phi^2 + f_n \cdot \Phi$ bzw. $\Phi^{n+1} = f_{n+1} \cdot \Phi + f_n$ und $(-\varphi)^{n+2} = f_{n+1} \cdot (-\varphi)^2 + f_n \cdot (-\varphi)$ bzw. $(-\varphi)^{n+1} = f_{n+1} \cdot (-\varphi) + f_n$, $n \in \mathbb{N}$ („**Linearisierung** der Φ-Potenzen").

Durch Subtraktion dieser beiden Formeln lässt sich umgekehrt eine Formel zur **expliziten Berechnung der Fibonacci-Zahlen** mit Hilfe des Goldenen Schnitts herleiten, die **Binet-Formel**:

$$f_n = \frac{\Phi^n - \varphi}{\ } n\Phi + \varphi = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, n \in \mathbb{N}.$$

Das Erstaunliche dieser Formel: Auf der rechten Seite steht ein Rechenausdruck aus Brüchen und Potenzen der irrationalen Zahl $\sqrt{5}$, auf der linken Seite eine natürliche Zahl.

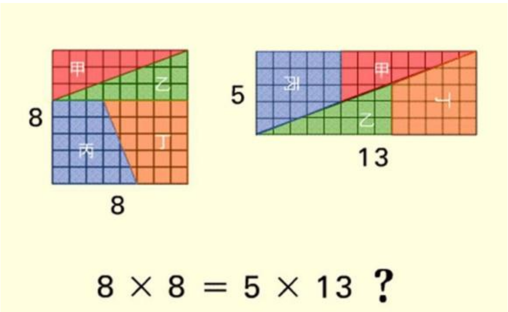
Für sehr großes n wird $(-\varphi)^n$ sehr klein. Deshalb gilt die **Näherungsformel**: $f_n \approx \frac{\Phi^n}{\sqrt{5}}$.

Ein weiterer faszinierender Zusammenhang zwischen Fibonacci-Zahlen und Goldenem Schnitt ergibt sich, wenn man Fibonacci-Quotienten $q_n = f_{n+1} : f_n$ betrachtet:

Die Folge $<q_n>$ der Fibonacci-Quotienten konvergiert gegen Φ.

Der Nachweis der Konvergenz ist der schwierige Teil des Beweises. Dass der Grenzwert Φ sein muss, ist dagegen leicht einzusehen. Für q_n gilt nämlich: $q_n = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$. Wenn $<q_n>$ konvergiert, also einen Grenzwert q hat, dann muss für diesen gelten: $q = 1 + \frac{1}{q}$, also $q = \Phi$.

Auch für Lucas-Folgen gilt: Die Folge der Quotienten benachbarter Folgenglieder konvergiert gegen Φ.



Dass man seinen Augen nicht immer trauen kann, lehren uns die Chinesen mit diesem Bild: Das Quadrat wird in zwei Trapeze und zwei Dreiecke zerlegt, die dann „genau" zu einem Rechteck zusammen gelegt werden. Vergleichen Sie die Flächeninhalte von Quadrat und Rechteck. Sie werden verblüfft feststellen, dass Sie soeben bewiesen haben: 64 = 65. „Das sieht man doch."

Der mathematische Hintergrund dieser geometrischen Täuschung ist die Aussage, dass sich das Quadrat einer Fibonacci-Zahl (hier 8) vom Produkt ihrer beiden Nachbarzahlen (hier 5 und 13) stets um +1 oder –1 unterscheidet. Den Beweis führt man durch vollständige Induktion. Wie muss man das Quadrat mit der Seitenlänge13 zerlegen, um zu „zeigen", dass 169 = 168 ist?

11. Φ als Kettenbruch und Kettenwurzel

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Unter einem **regulären Kettenbruch** versteht man einen Bruch der Form mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}$. (Es gibt auch andere Kettenbrüche. Wir meinen im Folgenden mit Kettenbruch immer einen regulären Kettenbruch.) Ein Kettenbruch kann **endlich** oder **unendlich** sein. Statt der Darstellung mit dem Bruchstrich schreibt man oft kurz: $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$.

Bricht man einen Kettenbruch $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots]$ mit mehr als n Gliedern nach dem n-ten Glied ab, dann heißt $[a_0; a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]$ der n-te **Näherungsbruch**.

Jeder endliche Kettenbruch lässt sich in einen (gemischten) Bruch verwandeln. Umgekehrt gilt auch: **Jede rationale Zahl lässt sich in einen endlichen Kettenbruch verwandeln.** Die Umwandlung erfolgt mit Hilfe des **euklidischen Algorithmus**, indem man den Quotient in den einzelnen Schritten als Teilnenner des Kettenbruchs notiert:

Euklidischer Algorithmus	Kettenbruch	Kurzdarstellung
$27 = 2 \cdot 10 + 7$ $10 = 1 \cdot 7 + 3$ $7 = 2 \cdot 3 + 1$ $3 = 3 \cdot 1$	$\frac{27}{10} = 2 + \frac{7}{10} = 2 + \cfrac{1}{\frac{10}{7}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \frac{3}{7}}$ $= 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\frac{7}{3}}} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \frac{1}{3}}}$	$[2;\ 1, 2, 3]$ Eine Alternative (die einzige) ist $[2;\ 1, 2, 2, 1]$

Jeder unendliche Kettenbruch konvergiert und stellt folglich eine reelle Zahl dar, und zwar eine irrationale Zahl.

Bei der Dezimaldarstellung reeller Zahlen entsprechen periodische Dezimalbrüche den rationalen Zahlen. **Periodische Kettenbrüche** spielen ebenfalls eine besondere Rolle: Sie sind die irrationalen Lösungen quadratischer Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten (Euler/ Lagrange). Beispiel: $\sqrt{2} = [1;\ \overline{2}] = [1; 2, 2, 2, \cdots]$

Auch bei den Kettenbrüchen nimmt Φ eine besondere Stellung ein: Es ist der von der Darstellung her **einfachste unendliche Kettenbruch**: $\Phi = [1;\ \overline{1}] = [1; 1, 1, 1, \cdots]$; denn aus der Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$ ergibt sich die Gleichungskette

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} = 1 + \cfrac{1}{1+\frac{1}{\Phi}} = \cdots = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\frac{1}{\cdots}}}.$$

Ebenso ergibt sich $\varphi = [0;\ \overline{1}] = [0; 1, 1, 1, \cdots]$ und $\Phi^2 = [2;\ \overline{1}] = [2; 1, 1, 1, \cdots]$

Und noch etwas Erstaunliches: **Die endlichen Näherungsbrüche** für $\Phi = [1;\ \overline{1}]$, nämlich $[1]$, $[1; 1]$, $[1; 1, 1]$, $[1; 1, 1, 1]$, ... **sind genau die Fibonacci- Quotienten** $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \ldots$

Die Konvergenz der unendlichen Kettenbrüche liefert also auch einen Beweis für die Konvergenz der Fibonacci-Quotienten gegen Φ.

Eine Besonderheit der unendlichen Kettenbrüche ist, dass die endlichen Näherungsbrüche eine besonders gute rationale Approximation der entsprechenden reellen Zahl sind. Also liefern die **Fibonacci-Quotienten besonders gute Näherungen für den Goldenen Schnitt**!

Zum Abschluss noch ein „Trick“: Aus der Gleichung $\Phi^2 = \Phi + 1$ ergibt sich auch die folgende Gleichungskette und damit die Darstellung von Φ als **Kettenwurzel**

$$\Phi = \sqrt{1+\Phi} = \sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\Phi}}} = \cdots = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}}$$