



Didaktik der Arithmetik Klasse 1-3

SS 2009

Hans-Dieter Rinkens

#### Inhalt

- Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW
- Arithmetische Vorkenntnisse am Schulanfang
- Zahlaspekte, Zählen, Zahlzeichen
- Zum Gleichheitszeichen
- Materialien im Anfangsunterricht
- Addieren und Subtrahieren: Grundvorstellungen und Grundverständnis
- **Beginn der Rechenfertigkeit bei Erstklässlern**
- Addieren und Subtrahieren: Rechen-Strategien
- Der Zahlenraum bis 100: Aufbau und additives Rechnen
- Multiplizieren und Dividieren: Grundvorstellungen, Grundverständnis, Einmaleins
- Prinzipien des Übens
- Der Zahlenraum bis 1 Million: Stellenwertsystem
- Halbschriftliches Rechnen
- Umgang mit Daten und Größen: Sachrechnen
- Rechenstörung: Prävention und Förderung (Dr. Thomas Rottmann)

## Wie kommt das Einspluseins in den Kopf?

Der Weg dorthin kann als innere Landkarte verstanden werden –  
mit einer wachsenden Zahl von Orientierungspunkten.

The infographic features a dark red background with two speech bubbles. The left bubble is blue and contains a quote from a teacher. The right bubble is red and contains test results. The background text is partially obscured by the bubbles.

**Zitat einer Lehrerin:**  
„ ... die Aufgabe 15-11 darf den Kindern im ersten Schuljahr doch nicht gestellt werden; zweistellige Zahlen voneinander subtrahieren, das ist doch viel zu schwer ...“

**Ergebnis des Tests:**  
59 % der Kinder haben diese Aufgabe am Ende des 1. Schulhalbjahres richtig gelöst

- Untersuchungsdesign & Leitfragen
- Ergebnisse des Additionstests
- Ergebnisse des Subtraktionstests
- Fehleranalyse
- Zusammenfassung und mögliche Konsequenzen für den Anfangsunterricht

## Untersuchungsdesign & Leitfragen

- **Auswahl der Klassen:**

es wurden nur Klassen ausgewählt,  
die mit dem Buch WELT DER ZAHL arbeiten -  
das Unterrichtswerk geht vom Prinzip des ganzheitlichen Lernens aus:

„Das Kind lernt mit den Sinnen, mit Gefühlen, mit Verstand!“

- **Zeitpunkt:**

der Zeitpunkt lag vor dem Zur-Sprache-Bringen  
einzelner Rechenstrategien  
und vor Übungseinheiten, die auf Automatisierung abzielen.  
Bis zu diesem Zeitpunkt kamen die Zahlen bis zwanzig vor –  
in der Zahlenreihe wie in Zerlegungen.  
Grundvorstellungen des Addierens und Subtrahierens wurden  
handlungsorientiert und mit strukturiertem Material gewonnen.

## Untersuchungsdesign & Leitfragen

- **Pilotstudie (2001):**

5 Schulen (12 Klassen) in NRW, wobei 263 Kinder am Additionstest und  
256 Kinder am Subtraktionstest teilgenommen haben

- **Hauptstudie (2002):**

**Additionstest:**

48 Schulen (113 Klassen), 2492 Kinder

„ a + b = “

im Zahlen-  
raum bis 20

**Subtraktionstest:**

49 Schulen (111 Klassen), 2427 Kinder

„ a - b = “

## Untersuchungsdesign & Leitfragen

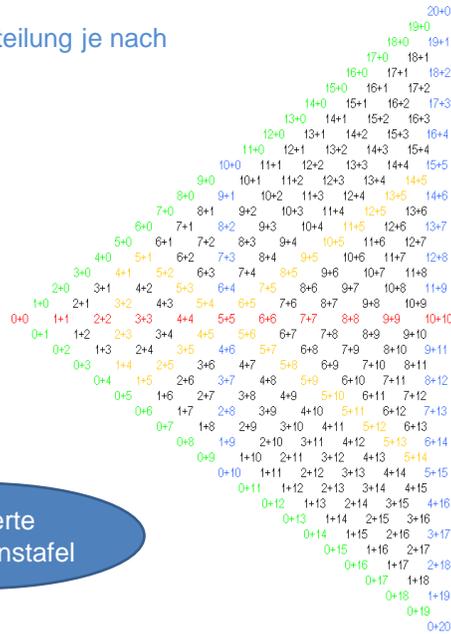
Addieren	Subtrahieren
<b>Stellt die Zahl Zehn für die Kinder eine Schwellenzahl dar?</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist der <b>Zehnerübergang</b> ein wirkliches <b>Hindernis</b> für Kinder?</li> <li>Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine <b>besondere Zahl</b>, so dass ihnen Aufgaben leichter fallen, die als Ergebnis Nachbarzahlen von zehn, also neun oder elf, haben?</li> </ul>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine besondere Zahl, so dass sie Aufgaben mit dem Ergebnis Zehn oder Zwanzig oder Aufgaben mit einem Summanden Zehn leichter lösen?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist die Zahl Zehn für die Kinder eine besondere Zahl, so dass sie Aufgaben mit dem Minuend zehn oder zwanzig oder Aufgaben, deren Subtrahend oder Ergebnis zehn ist, leichter lösen?</li> </ul>
<b>Stellt die Zahl Zwölf eine sprachlich bedingte Schwellenzahl dar?</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Ist es für die Kinder einfacher, Aufgaben zu berechnen, die den Zahlenraum bis zwölf nicht überschreiten?</li> </ul>	
<b>Aufgaben mit der Null</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben, in denen ein Summand Null ist, schwerer?</li> <li>Macht es einen Unterschied, ob der erste oder der zweite Summand Null ist?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben mit dem Subtrahend Null schwerer?</li> <li>Fällt Kindern das Lösen von Aufgaben mit Null als Ergebnis schwerer?</li> </ul>

## Untersuchungsdesign & Leitfragen

Addieren	Subtrahieren
<b>Tauschgaben</b>	<b>Ergänzen</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Werden Tauschaufgaben erkannt? Wird die Kommutativität genutzt?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Sind Aufgaben mit dem Ergebnis Eins leichter? Werden Aufgaben mit Hilfe des Ergänzens gelöst?</li> </ul>
<b>Verdopplungs- und Fastverdopplungsaufgaben</b>	<b>Halbierungs- und Fasthalbierungsaufgaben</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>Können die Kinder Verdopplungsaufgaben bzw. Fastverdopplungsaufgaben häufiger fehlerfrei berechnen als andere Aufgaben?</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>Können die Kinder Halbierungsaufgaben bzw. Fasthalbierungsaufgaben häufiger fehlerfrei berechnen als andere Aufgaben?</li> </ul>
<b>Analogieaufgaben</b>	
<ul style="list-style-type: none"> <li>Werden Analogieaufgaben zwischen dem ersten und zweiten Zehner von den Schülern erkannt? Wird die Analogie genutzt?</li> </ul>	

## Untersuchungsdesign & Leitfragen

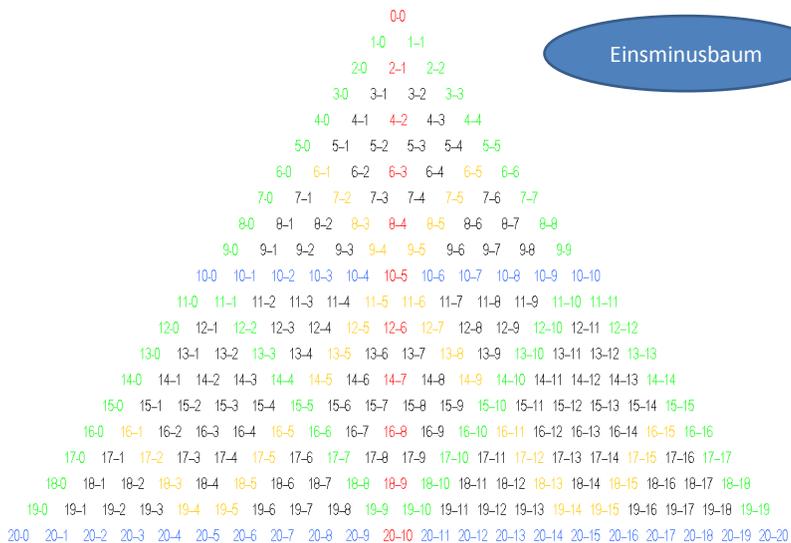
Aufgabenverteilung je nach Leitfrage :



Erweiterte  
Einspluseinstafel

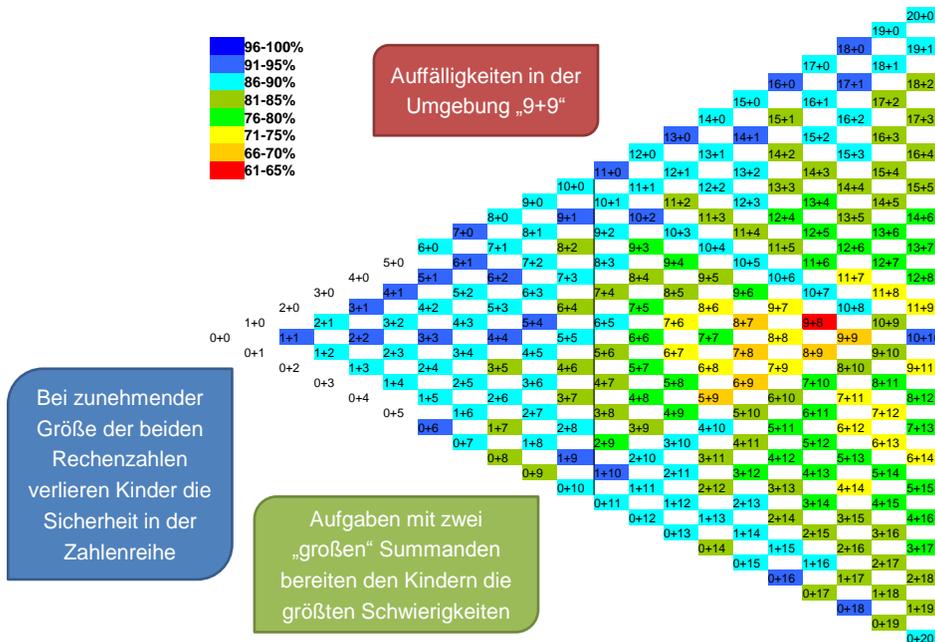
## Untersuchungsdesign & Leitfragen

Aufgabenverteilung je nach Leitfrage :



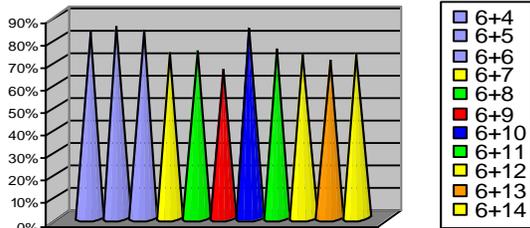
Einsminusbaum

## Ergebnisse des Additionstests



## Ergebnisse des Additionstests

- die „handelnde“ Zahl spielt eine entscheidende Rolle
- Zahl „Zehn“: erste Einsicht in den dezimalen Aufbau der Zahlenreihe
- Es gibt fast doppelt so viele Kinder, die die Aufgabe mit der kleinen „handelnden“ Zahl richtig, die mit der großen aber falsch gelöst haben, wie umgekehrt.



		groß	
		FALSCH	RICHTIG
handelnde Zahl		21,44%	78,56%
klein	FALSCH	15,75%	9,38%
	RICHTIG	84,25%	12,02%
			72,22%

Die „handelnde“ Zahl ist in dieser Phase ein entscheidender Parameter für die Sicherheit des Rechnens.

## Ergebnisse des Additionstests

Wird die Bedeutung von Tauschaufgaben vor deren Thematisierung im Unterricht bereits erkannt und genutzt?

Kinder nutzen intuitiv die **Kommutativität** sehr früh. Sie gehört offenbar zum **Grundverständnis der Addition**, die durch den Umgang mit entsprechenden Materialien entwickelt wird!

70 % der Kinder haben die Aufgabe 14+3 bzw. 3+14 richtig gelöst

		klein + groß	
		FALSCH	RICHTIG
groß + klein	FALSCH	13,98%	7,64%
	RICHTIG	86,02%	8,75%
			83,61%
			77,28%

klein = 5, 6

Der Unterschied ist nur geringfügig

		klein + groß	
		FALSCH	RICHTIG
groß + klein	FALSCH	17,82%	11,03%
	RICHTIG	82,18%	8,94%
			80,03%
			73,24%

## Ergebnisse des Additionstests

Hat sich die Zahl Zehn als SCHWELLENZAHL oder als HINDERNISZAHL herausgestellt?

Zehnerüberschreitung

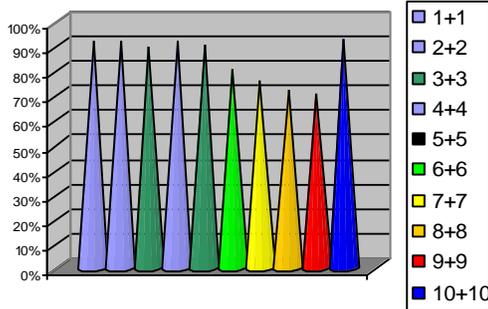
		x+y > 10	
		FALSCH	RICHTIG
		19,54%	80,46%
x+y < 10	FALSCH	15,47%	6,92%
	RICHTIG	84,53%	12,21%
			8,55%
			72,32%

- 72 % der Kinder lösen beide Aufgaben richtig
- der Unterschied ist nicht groß, deutet aber an, dass die Zahl Zehn eine Schwelle bei der rechnerischen Sicherheit darstellt
- die Aufgaben im Zahlenraum bis 10 werden häufiger richtig gerechnet, als die Aufgaben im Zahlenraum von 10 bis 20

## Ergebnisse des Additionstests

Der Umgang mit gewissen Materialien (z.B. Wendeplättchen im Zusammenhang mit „Rechenschiffen“ oder mit einem „Zwanziger-Feld“) legt gerade beim Verdoppeln eine andere Strategie nahe als die des linearen Hinzufügens.

Sind VERDOPPLUNGSAUFGABEN einprägsamer?



- Verdopplungsaufgaben bis  $5 + 5$  wurden sehr gut gelöst haben, während die Aufgaben  $6 + 6$  bis  $9 + 9$  mit zunehmender Größe der Summanden schlechter berechnet wurden

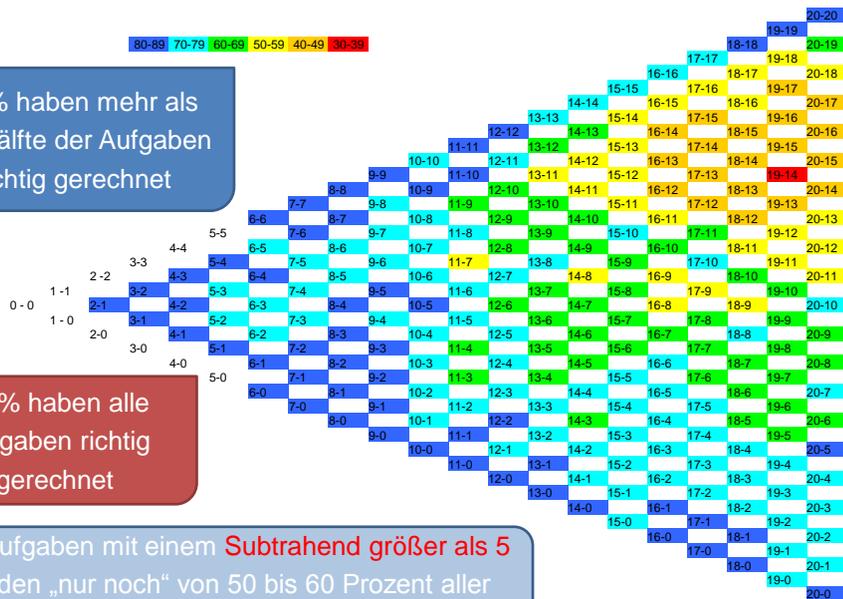
- Verdopplungsaufgabe  $10 + 10$  unterstreicht die besondere Rolle der 10
- Vermutung: Aufgaben bis  $5 + 5$  bereits automatisiert

## Ergebnisse des Subtraktionstests

77 % haben mehr als die Hälfte der Aufgaben richtig gerechnet

10 % haben alle Aufgaben richtig gerechnet

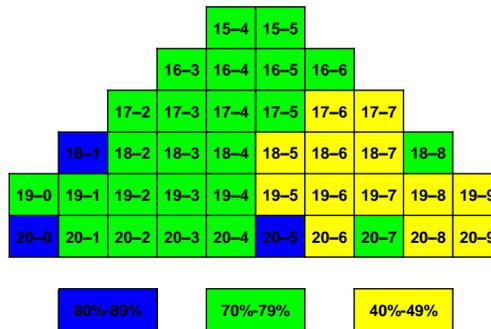
Die Aufgaben mit einem **Subtrahend größer als 5** wurden „nur noch“ von 50 bis 60 Prozent aller Kinder richtig bearbeitet.



## Ergebnisse des Subtraktionstests

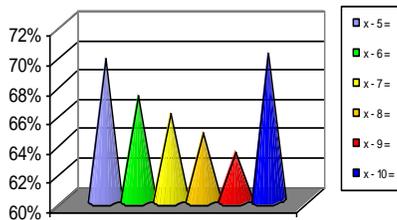
Aufgaben mit der Zehn als Minuend wurden schlechter gelöst als Aufgaben mit der Neun oder der Acht als Minuend.

Aufgaben mit einem Minuend und einem Subtrahend **über Zehn** bereiteten den Kindern die größten Schwierigkeiten.



Entscheidende Bedeutung hat die „handelnde“ Zahl: Aufgaben mit einem **Subtrahend kleiner als fünf** konnten von mehr Kindern richtig bearbeitet werden als die Aufgaben mit einem größeren Subtrahend.

## Ergebnisse des Subtraktionstests



*individueller Vergleich:*  
Zehnerüberschreitung  
Überschreiten der Zehn stellt eine Schwelle in der Sicherheit des Rechnens dar

- Zahl „Zehn“:  
eine erste Einsicht in den dezimalen Aufbau der Zahlenreihe wird genutzt

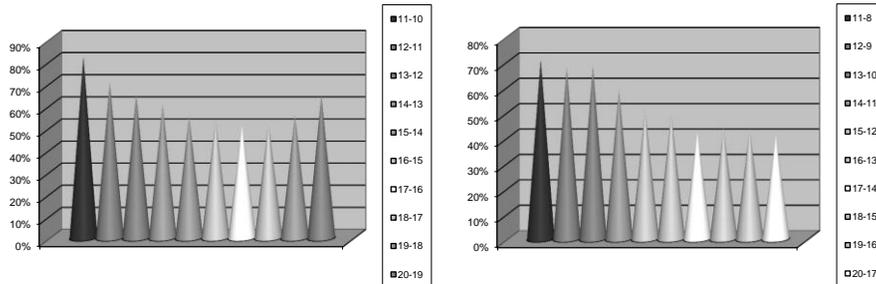
		mit Zehner- überschreitung	
		FALSCH	RICHTIG
ohne Zehnerüber- schreitung	FALSCH	29,05	19,90
	RICHTIG	70,95	24,47
			55,62
			9,15

Je größer die **handelnde Zahl** ist, desto schlechter das Ergebnis.  
Die **Zehn** durchbricht diese Regel, ist also eine „**besondere Zahl**“.

## Ergebnisse des Subtraktionstests

Subtrahieren durch Ergänzen:

"11 – 10 ist leicht, 11 – 9 nicht"



Nachbar-Zahlen (Unterschied Eins) werden als solche "gesehen". Dieser "Blick für Nachbar-Zahlen" ist allerdings noch nicht gefestigt: Er schwächt sich mit wachsender Größe der Zahlen ab.

## Fehleranalyse

Den Additionstest haben 2086 Kinder (84 %) und den Subtraktionstest 1812 Kinder (75 %) *komplett bearbeitet*.

Beim Additionstest haben 823 Kinder (33 %) und beim Subtraktionstest 248 Kinder (10 %) *alle 21 Aufgaben richtig gelöst*.

Im Schnitt haben die Kinder 4,3 Fehler im Additionstest und 6,0 Fehler im Subtraktionstest gemacht.

### Auftretenden Fehler nach ihrer Häufigkeit typifiziert:

- **Verzählfehler:** Das Ergebnis weicht um +1 oder –1 von der richtigen Lösung ab.
- **Operationsfehler:** Die Rechenoperation wird verwechselt.
- **Perseverationsfehler:** Eine Ziffer oder Zahl wird aus der Aufgabenstellung ins Ergebnis übertragen.
- **Stellenwertfehler:** Es wird mit den Ziffern der Einer-Stelle gerechnet; die Zehner-Stelle wird nicht berücksichtigt oder falsch übertragen.

## Fehleranalyse

Rund die Hälfte aller Fehler sind den folgenden Fehlertypen zuzuordnen:

	Verzählfehler -1	Verzählfehler +1	Stellenwert fehler	Persevera- tionsfehler	Operations fehler
Addition	16,98	12,34	5,69	9,15	4,81
Subtraktion	12,86	12,45	16,09	9,66	2,55

Addition und Subtraktion unterscheiden sich hinsichtlich zweier Fehlertypen deutlich:

- **Stellenwertfehler** kommen bei der Subtraktion fast dreimal so häufig vor wie bei der Addition (16,09 % gegenüber 5,69 %)
- **Operationsfehler** etwa halb so oft (2,55 % gegenüber 4,81 %).

## Fehleranalyse

Die **Verzählfehler** erklären sich durch eine fehlerhafte Mischung der beiden konstituierenden Elemente der Zählstrategien, den „**richtigen Anfang**“ und die „**richtige Deutung der Endzahl**“.

5 + 3 durch Weiterzählen: (5) 6 7 8

Anfang 6 nicht 5; die Endzahl 8 ist das Ergebnis der Additionsaufgabe.

8 – 3 durch Rückwärtszählen: 8 7 6 (5)

Anfang 8; die Endzahl 6 ist nicht das Ergebnis der Subtraktionsaufgabe, sondern die nächste Zahl in der Zählreihe rückwärts.

<b>Addition</b>		<b>Verzählen um +1</b>			<b>Subtraktion</b>		<b>Verzählen um +1</b>		
		nein	ja				nein	ja	
		74,17	25,83				59,54	40,46	
<b>Verzählen um -1</b>	nein	68,43	54,55	13,88	<b>Verzählen um -1</b>	nein	60,73	38,52	22,21
	ja	31,57	19,61	11,95		ja	39,27	21,01	18,25

## Zusammenfassung & Konsequenzen

1. Es erstaunt das positive Gesamtergebnis bei der Addition wie Subtraktion.
2. Die Mehrzahl der Kinder braucht kein Material, um zur Lösung zu kommen, ist aber noch stark im zählenden Rechnen verhaftet (Materialeinsatz).
3. Der wichtigste Zusammenhang im Netzwerk des Einspluseins ist die Kommutativität.
4. Die Subtraktion im Curriculum soweit nach hinten zu verlagern, bis das Einspluseins automatisiert ist, und dann auf den Zusammenhang von Aufgabe und Umkehraufgabe zu setzen, um das Einsminuseins zu erarbeiten, scheint unangemessen, da so der operative Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion, der zum Grundverständnis beider Operationen gehört, viel zu spät zur Sprache kommt.

## Zusammenfassung & Konsequenzen

5. Die Zahl Zehn hat ein doppeltes Gesicht. Kinder entwickeln schon früh ein intuitives Verständnis für die besondere Rolle der Zehn.  
Aufgaben des Typs „ $x + 10$ “ bzw. „ $x - 10$ “ werden deutlich besser gelöst als andere.  
Die Kehrseite ist die „Schwelle“ Zehn beim Rechnen. Die schwierigsten Aufgaben, sind die Aufgaben mit zwei „großen“ Zahlen, bei denen zwangsläufig die „handelnde“ Zahl auch groß ist. [Rechenhilfen]
6. Flexibles Rechnen erfordert ein zunehmendes Repertoire an Rechenstrategien. Keime sind schon früh vorhanden, sie müssen im Unterricht zur Entfaltung gebracht werden.  
Insbesondere der "Zahlenblick" muss weiter geschärft werden.

### Literatur

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. [2005]: Feldstudie zur beginnenden Rechenfertigkeit von Erstklässlern. Verfügbar unter: <http://www.rinkens-hd.de/data/ErstklaesslerFaeh.pdf>

Rinkens, H.-D.; Eilerts, K. & Schaper, K. [2004]: 11-10 ist leicht, 11-9 nicht. Ergebnisse einer Feldstudie zu arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern im Bereich des Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase. In: Krauthausen, G./Scherer, P.: Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer 2004 (126 - 134).