



Didaktik der Arithmetik Klasse 1-3

SS 2009

Hans-Dieter Rinkens

#### Inhalt

- Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW
- Arithmetische Vorkenntnisse am Schulanfang
- Zahlaspekte, Zählen, Zahlzeichen
- Zum Gleichheitszeichen
- Materialien im Anfangsunterricht
- Addieren und Subtrahieren: Grundvorstellungen und Grundverständnis
- Beginn der Rechenfertigkeit bei Erstklässlern
- **Addieren und Subtrahieren: Rechen-Strategien (Teil 1)**
- Der Zahlenraum bis 100: Aufbau und additives Rechnen
- Multiplizieren und Dividieren: Grundvorstellungen, Grundverständnis, Einmaleins
- Prinzipien des Übens
- Der Zahlenraum bis 1 Million: Stellenwertsystem
- Halbschriftliches Rechnen
- Umgang mit Daten und Größen: Sachrechnen
- Rechenstörung: Prävention und Förderung (Dr. Thomas Rottmann)

## Addieren und Subtrahieren - Rechen-Strategien

- Kernlehrplan Mathematik für die Grundschule
- Rechen-Sätze und Rechenstrategien
- Rechenstrategien beim Addieren und Subtrahieren
- Rechenstrategien und heuristisches Denken
- Vertiefung des Zahlverständnisses

## Ministerium für Schule und Weiterbildung – NRW Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW

### Inhaltsbezogene Bereiche

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen orientieren sich an **mathematische Leitideen**, die für den gesamten Mathematikunterricht – für die Grundschule und für das weiterführende Lernen – von fundamentaler Bedeutung sind.

### Zahlen und Operationen

**1+2** Auf der Grundlage **tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen** sowie **verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten** entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien, rechnen überschlagend und führen die schriftlichen Rechenverfahren verständig aus.

Schwerpunkte sind:

- Zahlvorstellungen
- Operationsvorstellungen
- Schnelles Kopfrechnen
- Zahlenrechnen
- Ziffernrechnen
- Überschlagendes Rechnen
- Flexibles Rechnen.

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Schnelles Kopfrechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 (z. B. *erfassen schnell strukturierte Anzahlen, ergänzen auf Stufenzahlen, rechnen mit Zehnerzahlen, zählen vorwärts- und rückwärts in Schritten, verdoppeln und halbieren*)
- geben die Zahlensätze des kleinen Einspluseins automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Zahlenrechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- nutzen Zahlbeziehungen (z. B. *Nachbarzahlen*) und Rechengesetze (z. B. *Kommutativgesetz*) für vorteilhaftes Rechnen
- beschreiben (eigene) Rechenwege für andere nachvollziehbar mündlich oder in schriftlicher Form



**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Überschlappendes Rechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

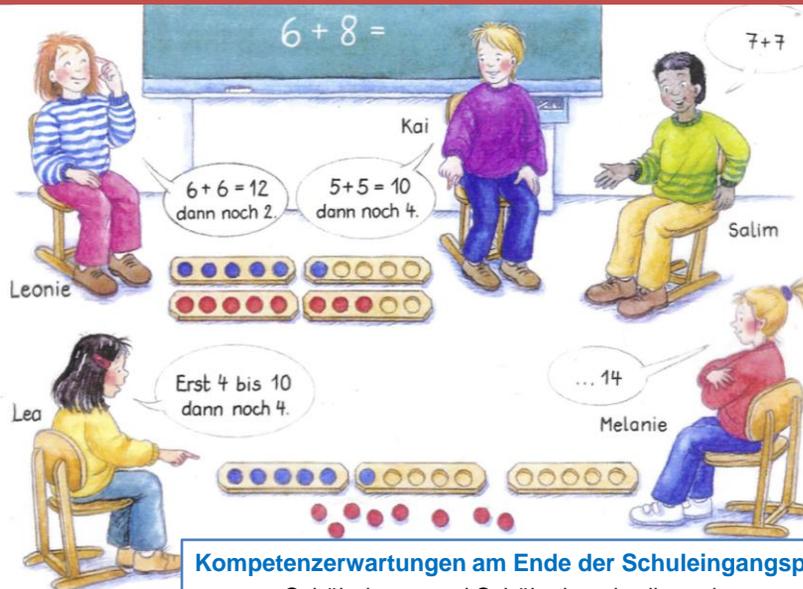
- geben die ungefähre Größenordnung der Ergebnisse von Aufgaben im Zahlenraum bis 100 an

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Flexibles Rechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens (z. B. *stellenweise*, *schrittweise*, *Hilfsaufgabe*)



**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**  
Schülerinnen und Schüler beschreiben eigene  
Rechenwege für andere nachvollziehbar

## Rechen-Sätze und Rechen-Strategien

Entscheidend für erfolgreiches Rechnen  
ist ein wachsender Bestand an  
verfügbaren Rechen-Sätzen und Rechen-Strategien.



## Rechen-Strategien

- setzen einen **Bestand an Rechen-Sätzen** voraus
- dienen der **Vernetzung von Rechen-Sätzen**
- ermöglichen **Selbst-Kontrolle**
- sind Anwendungen von **arithmetischen Gesetzen**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Zerlege in einfachere Teilaufgaben!**

**Rechne in Schritten!**

**Große Schritte, kleine Schritte!**

**Erst bis zur Ankerzahl,  
dann weiter!**

Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Erst vereinfachen,  
dann "korrigieren"!**

Gibt es eine einfache Nachbaraufgabe?

- Aufgabe mit Schwellenzahl
- Verdopplungsaufgabe
- ...

Das Erkennen der „leichten“ Aufgabe,  
der „Anker“-Aufgabe,  
der „Stütz“-Aufgabe,  
ist **nicht selbstverständlich**,  
hängt ab von der Operation,  
vom numerischen Material,  
von der eigenen Einschätzung.

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Andere Aufgabe, dasselbe Ergebnis!**



„Blick“ für den Zusammenhang zwischen dem numerischen Material und der „zweckmäßigen“ Gesetzmäßigkeit

$$37 + 46 + 24$$



Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

$$37 + 46 + 23$$



Hintergrund: **Kommutativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Nutze die Analogie!**



$$200 + 300 = 500$$

„zwei Hunde und drei Hunde sind fünf Hunde“

$$2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = (2 + 3) \cdot 100$$

Hintergrund: **Distributiv-Gesetz**

$$15 + 3 = 18 \quad \leftarrow \quad 5 + 3 = 8$$

$$(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$$

Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Zerlege in einfachere Teilaufgaben!**

Strategie: **Erst vereinfachen, dann "korrigieren"!**

Strategie: **Andere Aufgabe, dasselbe Ergebnis!**

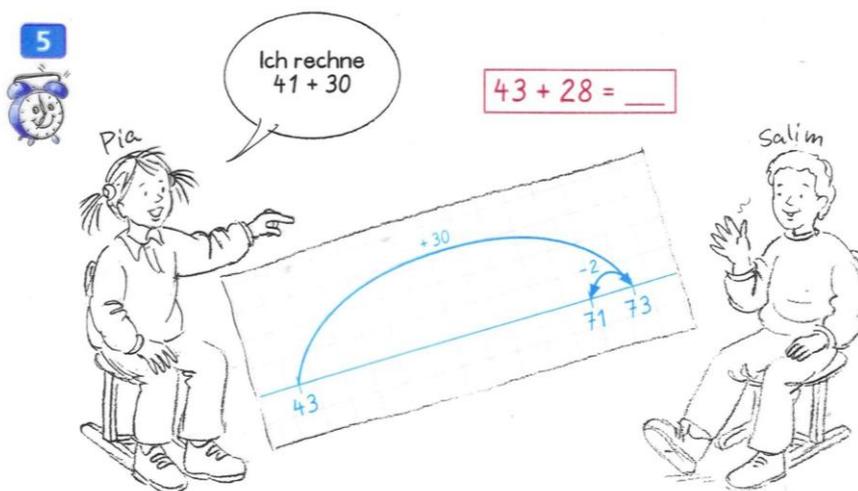
Strategie: **Nutze die Analogie!**

Das Erkennen der „einfacheren“ oder der „analogen“ Aufgabe, ist **nicht selbstverständlich**, hängt ab

- von der **Operation**,
- vom **Zahlen-Material**,
- von der subjektiven **Vorerfahrung**.

# Zahlenblick

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren



## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

"Das **Lernen auf eigenen Wegen** muss durch das **Lernen voneinander** ergänzt werden.

In der Auseinandersetzung mit anderen lernen Kinder

- andere Lösungswege kennen,
- die eigene Sichtweise zu artikulieren,
- Rückmeldungen zu nutzen,
- über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken und sie zu bewerten.

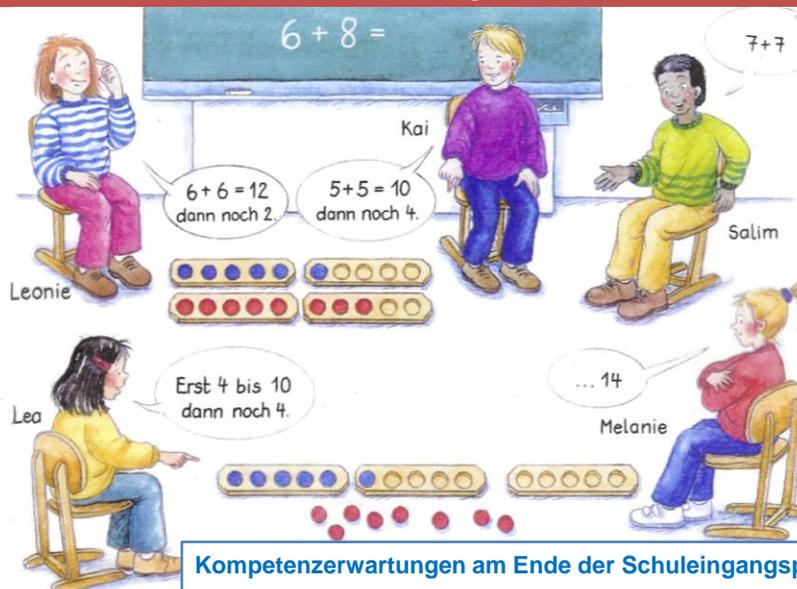
Gespräche über individuelle Vorgehensweisen, wie z.B. in

**Rechenkonferenzen**, dienen dem Austausch und damit der Verständigung.

Sie sind gleichzeitig ein Ort der **Gesprächserziehung**."

Lehrplan 2003

### Addieren und Subtrahieren - Rechen-Strategien



#### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Schülerinnen und Schüler beschreiben eigene  
Rechenwege für andere nachvollziehbar

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

# Rechen-Strategien

- abhängig von der Rechenoperation, ihren Gesetzmäßigkeiten und deren Kenntnis
- abhängig vom numerischen Material der Aufgabe (es gibt keine Universal-Strategie)
- **subjektiv gefärbt** („leichter/einfacher für mich“)
- immer verbunden mit dem **Risiko des Scheiterns**
- unerlässlich für **erfolgreiches Rechnen**

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

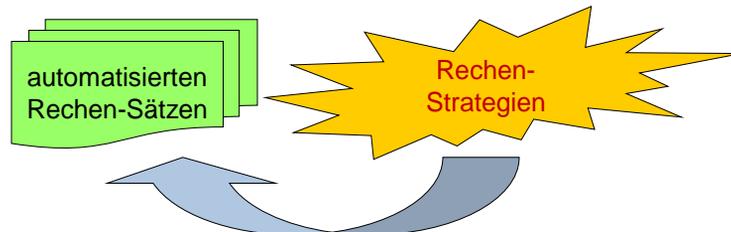
Die Schülerinnen und Schüler nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens

## Nochmal: Rechen-Sätze und Rechen-Strategien

# (Kopf-) Rechnen

ist erfolgreich im Zusammenspiel

- eines relativ gesättigten Bestandes an
- und eines hinreichenden Bestandes an



automatisierten  
Rechen-Sätzen

## (Kopf-) Rechnen

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim **schnellen Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100**  
(z. B. *erfassen schnell strukturierte Anzahlen, ergänzen auf Stufenzahlen, rechnen mit Zehnerzahlen, zählen vorwärts- und rückwärts in Schritten, verdoppeln und halbieren*)
- geben die Zahlensätze des **kleinen Einpluseins** automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab

## (Kopf-) Rechnen

Rechen-  
Strategien

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von **Rechengesetzen** und **Zerlegungsstrategien** mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- nutzen **Zahlbeziehungen** (z. B. *Nachbarzahlen*) und **Rechengesetze** (z. B. *Kommutativgesetz*) für vorteilhaftes Rechnen
- nutzen **aufgabenbezogen** oder **nach eigenen Präferenzen** eine **Strategie des Zahlenrechnens**  
(z. B. *stellenweise, schrittweise, Hilfsaufgabe*)

## Rechen-Strategien und heuristisches Denken



sind Einstieg in

# heuristisches Denken

„Ziel der Heuristik ist, die Methoden und Regeln von  
Entdeckung und Erfindung zu studieren.“

G. Polya

## Rechen-Strategien und heuristisches Denken

Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung

# Heurismen

subjektiv gefärbt

immer verbunden mit dem

# Risiko des Scheiterns

unerlässlich für

# erfolgreiches Problemlösen

Strategie: **Erst vereinfachen,  
dann "korrigieren"!**

Heurismus:

- Vereinfache die Aufgabe.
- Löse erst einen oder mehrere Spezialfälle.
- Versuche dann vom Spezialfall auf den allgemeinen Fall zu schließen.

Strategie: **Andere Aufgabe,  
dasselbe Ergebnis!**

Heurismus:

- Verwandle die Aufgabe, ohne das Ergebnis zu verändern.
- Kennst du ein "äquivalentes Problem", das du lösen kannst?

**Strategie:** Zerlege in einfachere Teilaufgaben!

**Rechne in Schritten!**

**Heurismus:**

Zerlege dein Problem

- vom Start her:  
Was kannst du aus den gegebenen Daten folgern?
- vom Ziel her:  
Was musst du wissen, um die Frage zu beantworten?
- Kannst du in Zwischenschritten vom Start zum Ziel kommen?

**Strategie:** Nutze die Analogie!

**Heurismus:**

- Kommt dir die Aufgabe vor wie eine andere Aufgabe, die du lösen kannst?
- Untersuche die Ähnlichkeit.

Rechen-Strategien      Heurismen

subjektiv gefärbt

immer verbunden mit dem

Risiko des Scheiterns

unerlässlich für

erfolgreiches Problemlösen

Vertiefung des Zahlverständnisses

Begriffsnetz Zahl

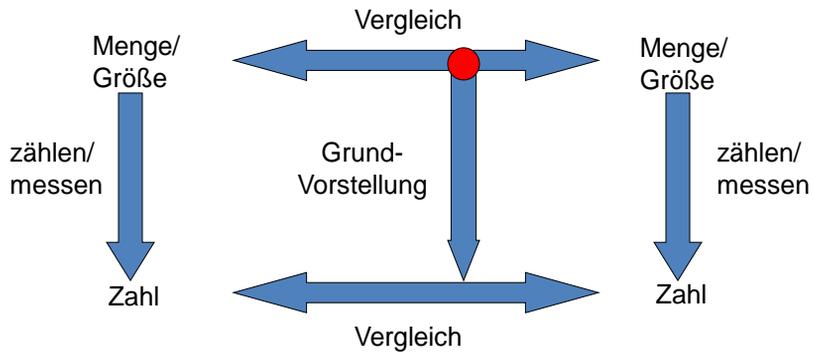
Mein Kind kennt schon die Zahlen!



Kleiner-Größer-Beziehung zwischen Zahlen

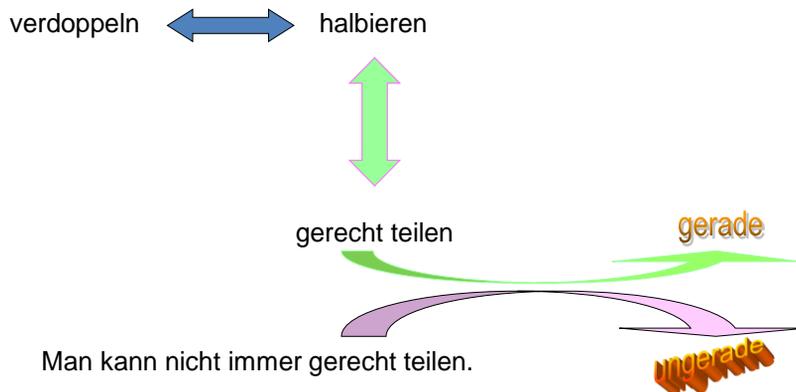
## Vertiefung des Zahlverständnisses

### ➤ Kleiner-Größer-Beziehung zwischen Zahlen



## Vertiefung des Zahlverständnisses

### ➤ Zahleigenschaften „gerade“ und „ungerade“





## Grundvorstellung und Grundverständnis

- **Grundvorstellungen** bilden die Grundlage für die **Begriffsbildung** und die

### Anwendungs-Orientierung der Mathematik

- Zum **Grundverständnis** einer Operation gehört die **Einsicht in fundamentale Eigenschaften**.
  - ➔ Erst dann kann sich der Umgang mit Zahlen losgelöst von der Situation entwickeln

### Struktur-Orientierung der Mathematik

## Grundvorstellungen des Addierens

- **zusammen tun** (legen, fügen, schauen, ...)
  - die beiden Zahlen (Summanden) sind gleichberechtigt
  - Aufgabe und Tauschaufgabe beschreiben die selbe Situation
  - Zusammentun und Zerlegen sind Umkehr-Handlungen voneinander
- **hinzu tun** (legen, fügen, geben, ...)
  - die beiden Zahlen (Summanden) haben verschiedene Bedeutung:
    1. **Summand**: Das Vorhandene, der Ausgangszustand, die „ruhende Zahl“
    2. **Summand**: Die Veränderung, der Operator, die „handelnde Zahl“
  - Die Tauschaufgabe beschreibt eine andere Situation
  - Hinzutun und Wegnehmen sind Umkehr-Handlungen voneinander

## Grundverständnis des Addierens

- **Einsicht** in die **Gesetzmäßigkeit der „Nachbar-Aufgaben“**



- „Monotoniegesetz der Addition“
- „Gesetz von der Konstanz der Summe“

- **Einsicht** in die **Gesetzmäßigkeit der „Tauschaufgaben“**



- „Kommutativ-Gesetz“

## Grundvorstellungen des Subtrahierens

- **weg nehmen** (geben, gehen, ...)
- Die beiden Zahlen haben **verschiedene Bedeutung**  
(1. Zahl = Minuend, 2. Zahl = Subtrahend)

**Minuend:** Das Vorhandene, der Ausgangszustand, die „ruhende Zahl“

**Subtrahend:** Die Veränderung, der Operator, die „handelnde Zahl“

**Subtrahieren beschreibt einen Handlungsablauf**

**Schwierigkeiten der bildlichen Darstellung**



## Grundverständnis des Subtrahierens

- **Einsicht** in die **Gesetzmäßigkeit der „Nachbar-Aufgaben“**



- „Monotoniegesetze der Subtraktion“
- „Gesetz von der Konstanz der Differenz“

- **Einsicht** in den **Zusammenhang zum Addieren**

## Grundverständnis des Subtrahierens

### Zusammenhang

Subtrahieren  $\longleftrightarrow$  Addieren

weg nehmen - hinzu fügen

weg geben - hinzu nehmen

weg gehen - hinzu kommen

aussteigen - einsteigen

um so viel weniger als - um so viel mehr als

### Subtrahieren als Wegnehmen oder Ergänzen

Aufgabe:  $91 - 89 = ?$   $? + 4 = 21$

Das selbe Ergebnis wie:  $89 + ? = 91$   $21 - 4 = ?$

## Wie kommt das Einspluseins in den Kopf?

Der Weg dorthin kann als innere Landkarte verstanden werden – mit einer wachsenden Zahl von Orientierungspunkten.

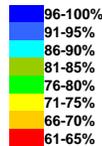
### Leitfragen der Feldstudie:

Wie orientieren sich Kinder und gibt es besondere Orientierungspunkte bei der Entwicklung der Einspluseins-Karte?

Welche Rechensätze des Einspluseins und des Einsminuseins sind Kernsätze, die eher als andere automatisiert werden, und welche Rechenstrategien werden angewendet?

## Ergebnisse des Additionstests

48 Schulen  
113 Klassen  
2492 Kinder

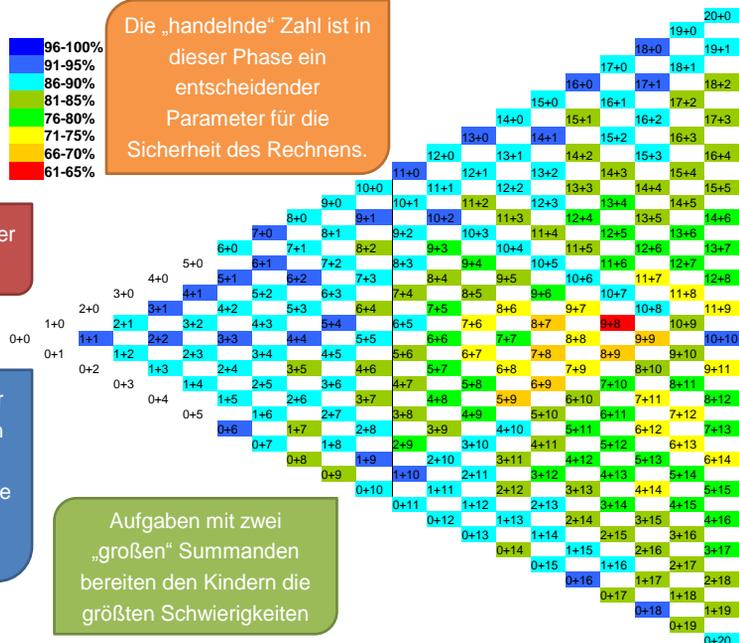


Die „handelnde“ Zahl ist in dieser Phase ein entscheidender Parameter für die Sicherheit des Rechnens.

Auffälligkeiten in der Umgebung „9+9“

Bei zunehmender Größe der beiden Rechenzahlen verlieren Kinder die Sicherheit in der Zahlenreihe

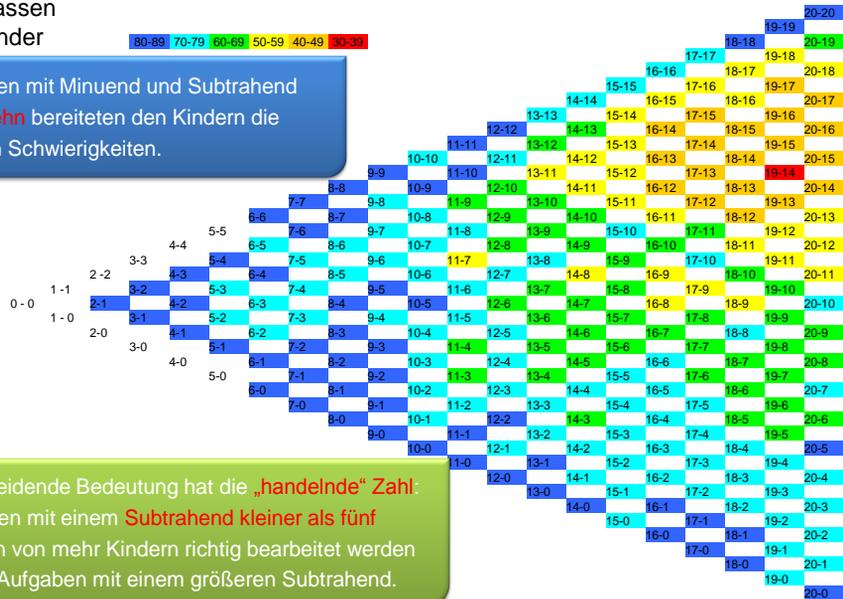
Aufgaben mit zwei „großen“ Summanden bereiten den Kindern die größten Schwierigkeiten



## Ergebnisse des Subtraktionstests

49 Schulen  
111 Klassen  
2427 Kinder

Aufgaben mit Minuend und Subtrahend  
über Zehn bereiteten den Kindern  
die größten Schwierigkeiten.



Entscheidende Bedeutung hat die „handelnde“ Zahl:  
Aufgaben mit einem Subtrahend kleiner als fünf  
konnten von mehr Kindern richtig bearbeitet werden  
als die Aufgaben mit einem größeren Subtrahend.

## Zusammenfassung & Konsequenzen

1. Es erstaunt das positive Gesamtergebnis bei der Addition wie Subtraktion.
2. Die Mehrzahl der Kinder braucht kein Material, um zur Lösung zu kommen, ist aber noch stark im zählenden Rechnen verhaftet (Materialeinsatz).
3. Der wichtigste Zusammenhang im Netzwerk des Einspluseins ist die Kommutativität.
4. Die Subtraktion im Curriculum soweit nach hinten zu verlagern, bis das Einspluseins automatisiert ist, und dann auf den Zusammenhang von Aufgabe und Umkehraufgabe zu setzen, um das Einsminuseins zu erarbeiten, scheint unangemessen, da so der operative Zusammenhang zwischen Addition und Subtraktion, der zum Grundverständnis beider Operationen gehört, viel zu spät zur Sprache kommt.

## Zusammenfassung & Konsequenzen

5. Die Zahl Zehn hat ein doppeltes Gesicht. Kinder entwickeln schon früh ein intuitives Verständnis für die besondere Rolle der Zehn.

Aufgaben des Typs „ $x + 10$ “ bzw. „ $x - 10$ “ werden deutlich besser gelöst als andere.

Die Kehrseite ist die „Schwelle“ Zehn beim Rechnen. Die schwierigsten Aufgaben, sind die Aufgaben mit zwei „großen“ Zahlen, bei denen zwangsläufig die „handelnde“ Zahl auch groß ist. [Rechenhilfen]

6. Flexibles Rechnen erfordert ein zunehmendes Repertoire an Rechenstrategien. Keime sind schon früh vorhanden, sie müssen im Unterricht zur Entfaltung gebracht werden.

Insbesondere der "Zahlenblick" muss weiter geschärft werden.

### Literatur

Rinkens, H.-D. & Eilerts, K. [2005]: Feldstudie zur beginnenden Rechenfertigkeit von Erstklässlern. Verfügbar unter: [http://www.rinkens-hd.de/\\_data/ErstklaesslerFaeh.pdf](http://www.rinkens-hd.de/_data/ErstklaesslerFaeh.pdf)

Rinkens, H.-D.; Eilerts, K. & Schaper, K. [2004]: 11-10 ist leicht, 11-9 nicht. Ergebnisse einer Feldstudie zu arithmetischen Fähigkeiten von Erstklässlern im Bereich des Subtrahierens nach der materialgebundenen Einführungsphase. In: Krauthausen, G./Scherer, P.: Mit Kindern auf dem Weg zur Mathematik. Ein Arbeitsbuch zur Lehrerbildung. Festschrift für Hartmut Spiegel. Donauwörth: Auer 2004 (126 - 134).

### Inhalt

- Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW
- Arithmetische Vorkenntnisse am Schulanfang
- Zahlaspekte, Zählen, Zahlzeichen
- Zum Gleichheitszeichen
- Materialien im Anfangsunterricht
- Addieren und Subtrahieren: Grundvorstellungen und Grundverständnis
- Beginn der Rechenfertigkeit bei Erstklässlern
- **Addieren und Subtrahieren: Rechen-Strategien**
- Der Zahlenraum bis 100: Aufbau und additives Rechnen
- Multiplizieren und Dividieren: Grundvorstellungen, Grundverständnis, Einmaleins
- Prinzipien des Übens
- Der Zahlenraum bis 1 Million: Stellenwertsystem
- Halbschriftliches Rechnen
- Umgang mit Größen: Geld, Zeit, Länge, Gewicht
- Umgang mit Daten
- Heterogenität: Hochbegabung und Dyskalkulie
- Was ist eine gute Lehrerin/ ein guter Lehrer?

## Addieren und Subtrahieren - Rechen-Strategien

- Kernlehrplan Mathematik für die Grundschule
- Rechen-Sätze und Rechenstrategien
- Rechenstrategien beim Addieren und Subtrahieren
- Rechenstrategien und heuristisches Denken
- Vertiefung des Zahlverständnisses

## Ministerium für Schule und Weiterbildung – NRW Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW

### Inhaltsbezogene Bereiche

Die inhaltsbezogenen Kompetenzen orientieren sich an **mathematische Leitideen**, die für den gesamten Mathematikunterricht – für die Grundschule und für das weiterführende Lernen – von fundamentaler Bedeutung sind.

### Zahlen und Operationen

**1+2** Auf der Grundlage **tragfähiger Zahl- und Operationsvorstellungen** sowie **verlässlicher Kenntnisse und Fertigkeiten** entwickeln und nutzen die Schülerinnen und Schüler Rechenstrategien, rechnen überschlagend und führen die schriftlichen Rechenverfahren verständig aus.

Schwerpunkte sind:

- Zahlvorstellungen
- Operationsvorstellungen
- Schnelles Kopfrechnen
- Zahlenrechnen
- Ziffernrechnen
- Überschlagendes Rechnen
- Flexibles Rechnen.

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Schnelles Kopfrechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 (z. B. *erfassen schnell strukturierte Anzahlen, ergänzen auf Stufenzahlen, rechnen mit Zehnerzahlen, zählen vorwärts- und rückwärts in Schritten, verdoppeln und halbieren*)
- geben die Zahlensätze des kleinen Einpluseins automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Zahlenrechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von Rechengesetzen und Zerlegungsstrategien mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- nutzen Zahlbeziehungen (z. B. *Nachbarzahlen*) und Rechengesetze (z. B. *Kommutativgesetz*) für vorteilhaftes Rechnen
- beschreiben (eigene) Rechenwege für andere nachvollziehbar mündlich oder in schriftlicher Form



**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Überschlappendes Rechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

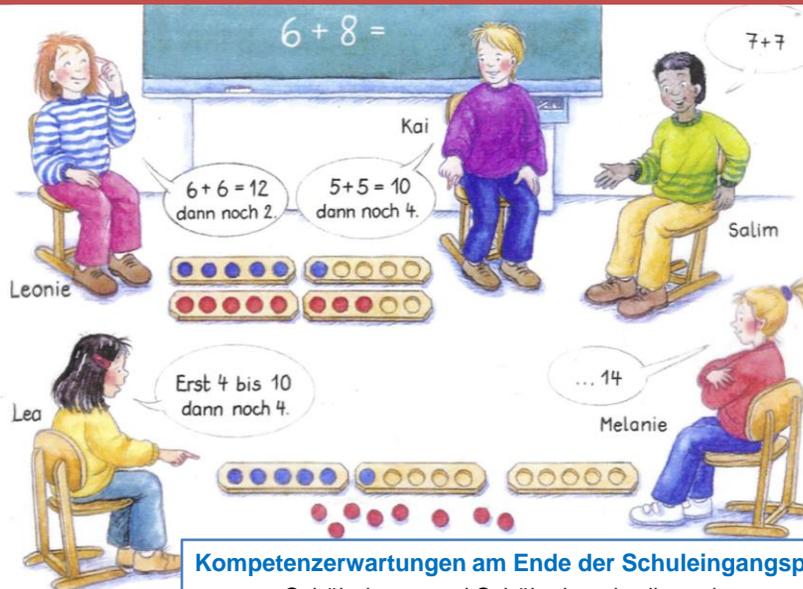
- geben die ungefähre Größenordnung der Ergebnisse von Aufgaben im Zahlenraum bis 100 an

**Bereich: Zahlen und Operationen**  
**Schwerpunkt: Flexibles Rechnen**

**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens (z. B. *stellenweise*, *schrittweise*, *Hilfsaufgabe*)



**Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase**  
Schülerinnen und Schüler beschreiben eigene  
Rechenwege für andere nachvollziehbar

## Rechen-Sätze und Rechen-Strategien

Entscheidend für erfolgreiches Rechnen  
ist ein wachsender Bestand an  
verfügbaren Rechen-Sätzen und Rechen-Strategien.



## Rechen-Strategien

- setzen einen **Bestand an Rechen-Sätzen** voraus
- dienen der **Vernetzung von Rechen-Sätzen**
- ermöglichen **Selbst-Kontrolle**
- sind Anwendungen von **arithmetischen Gesetzen**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Zerlege in einfachere Teilaufgaben!**

**Rechne in Schritten!**

**Große Schritte, kleine Schritte!**

**Erst bis zur Ankerzahl,  
dann weiter!**

Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Erst vereinfachen,  
dann "korrigieren"!**

Gibt es eine einfache Nachbaraufgabe?

- Aufgabe mit Schwellenzahl
- Verdopplungsaufgabe
- ...

Das Erkennen der „leichten“ Aufgabe,  
der „Anker“-Aufgabe,  
der „Stütz“-Aufgabe,  
ist **nicht selbstverständlich**,  
hängt ab von der Operation,  
vom numerischen Material,  
von der eigenen Einschätzung.

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie:

**Andere Aufgabe,  
dasselbe Ergebnis!**



„Blick“ für den Zusammenhang zwischen dem numerischen Material und der „zweckmäßigen“ Gesetzmäßigkeit

$$37 + 46 + 24$$



Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

$$37 + 46 + 23$$



Hintergrund: **Kommutativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Nutze die Analogie!**



$$200 + 300 = 500$$

„zwei Hunde und drei Hunde sind fünf Hunde“

$$2 \cdot 100 + 3 \cdot 100 = (2 + 3) \cdot 100$$

Hintergrund: **Distributiv-Gesetz**

$$15 + 3 = 18 \quad \leftarrow \quad 5 + 3 = 8$$

$$(10 + 5) + 3 = 10 + (5 + 3)$$

Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

Strategie: **Zerlege in einfachere Teilaufgaben!**

Strategie: **Erst vereinfachen, dann "korrigieren"!**

Strategie: **Andere Aufgabe, dasselbe Ergebnis!**

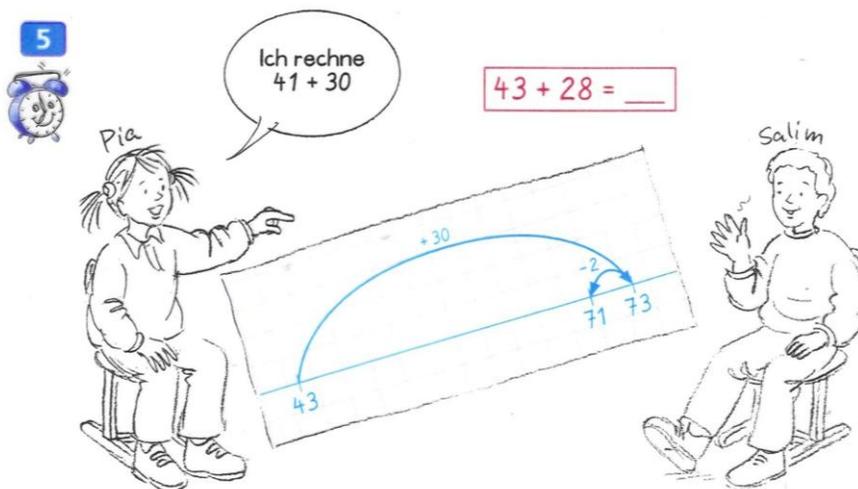
Strategie: **Nutze die Analogie!**

Das Erkennen der „einfacheren“ oder der „analogen“ Aufgabe, ist **nicht selbstverständlich**, hängt ab

- von der **Operation**,
- vom **Zahlen-Material**,
- von der subjektiven **Vorerfahrung**.

# Zahlenblick

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren



## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

"Das **Lernen auf eigenen Wegen** muss durch das **Lernen voneinander** ergänzt werden.

In der Auseinandersetzung mit anderen lernen Kinder

- andere Lösungswege kennen,
- die eigene Sichtweise zu artikulieren,
- Rückmeldungen zu nutzen,
- über verschiedene Herangehensweisen nachzudenken und sie zu bewerten.

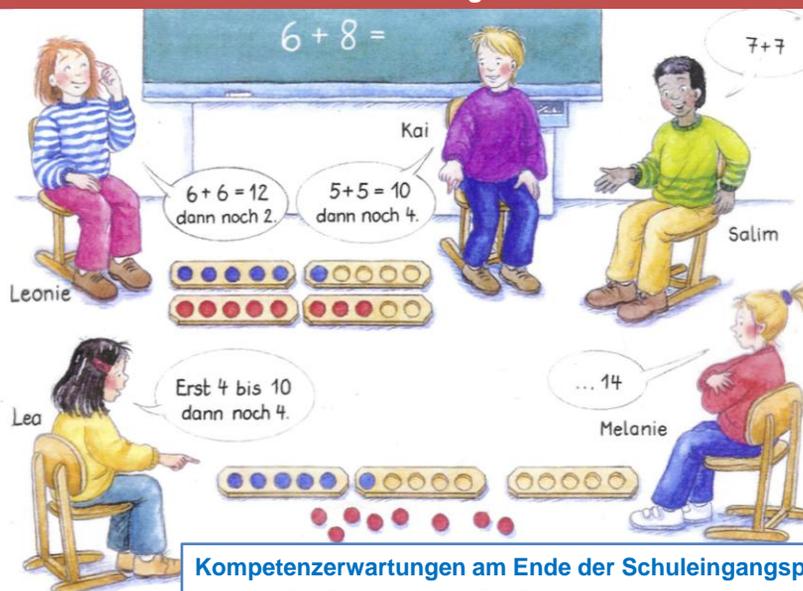
Gespräche über individuelle Vorgehensweisen, wie z.B. in

**Rechenkonferenzen**, dienen dem Austausch und damit der Verständigung.

Sie sind gleichzeitig ein Ort der **Gesprächserziehung**."

Lehrplan 2003

### Addieren und Subtrahieren - Rechen-Strategien



#### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Schülerinnen und Schüler beschreiben eigene  
Rechenwege für andere nachvollziehbar

## Rechen-Strategien beim Addieren und Subtrahieren

# Rechen-Strategien

- abhängig von der Rechenoperation, ihren Gesetzmäßigkeiten und deren Kenntnis
- abhängig vom numerischen Material der Aufgabe (es gibt keine Universal-Strategie)
- **subjektiv gefärbt** („leichter/einfacher für mich“)
- immer verbunden mit dem **Risiko des Scheiterns**
- unerlässlich für **erfolgreiches Rechnen**

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

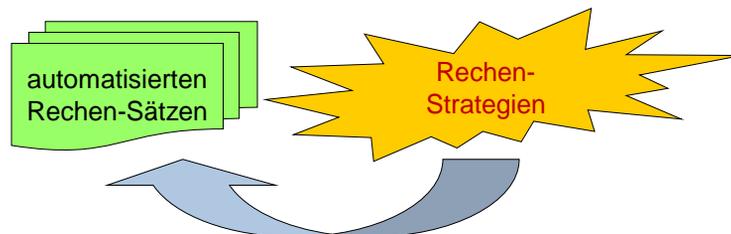
Die Schülerinnen und Schüler nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine Strategie des Zahlenrechnens

## Nochmal: Rechen-Sätze und Rechen-Strategien

# (Kopf-) Rechnen

ist erfolgreich im Zusammenspiel

- eines relativ gesättigten Bestandes an
- und eines hinreichenden Bestandes an



automatisierten  
Rechen-Sätzen

## (Kopf-) Rechnen

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim **schnellen Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100**  
(z. B. *erfassen schnell strukturierte Anzahlen, ergänzen auf Stufenzahlen, rechnen mit Zehnerzahlen, zählen vorwärts- und rückwärts in Schritten, verdoppeln und halbieren*)
- geben die Zahlensätze des **kleinen Einpluseins** automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab

## (Kopf-) Rechnen

Rechen-  
Strategien

### Kompetenzerwartungen am Ende der Schuleingangsphase

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum bis 100 unter Ausnutzung von **Rechengesetzen** und **Zerlegungsstrategien** mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- nutzen **Zahlbeziehungen** (z. B. *Nachbarzahlen*) und **Rechengesetze** (z. B. *Kommutativgesetz*) für vorteilhaftes Rechnen
- nutzen **aufgabenbezogen** oder **nach eigenen Präferenzen** eine **Strategie des Zahlenrechnens**  
(z. B. *stellenweise, schrittweise, Hilfsaufgabe*)

## Rechen-Strategien und heuristisches Denken



sind Einstieg in

# heuristisches Denken

„Ziel der Heuristik ist, die Methoden und Regeln von  
Entdeckung und Erfindung zu studieren.“

G. Polya

## Rechen-Strategien und heuristisches Denken

Methoden und Regeln von Entdeckung und Erfindung

# Heurismen

subjektiv gefärbt

immer verbunden mit dem

# Risiko des Scheiterns

unerlässlich für

# erfolgreiches Problemlösen

Strategie: **Erst vereinfachen,  
dann "korrigieren"!**

Heurismus:

- Vereinfache die Aufgabe.
- Löse erst einen oder mehrere Spezialfälle.
- Versuche dann vom Spezialfall auf den allgemeinen Fall zu schließen.

Strategie: **Andere Aufgabe,  
dasselbe Ergebnis!**

Heurismus:

- Verwandle die Aufgabe, ohne das Ergebnis zu verändern.
- Kennst du ein "äquivalentes Problem", das du lösen kannst?

**Strategie:** Zerlege in einfachere Teilaufgaben!

**Rechne in Schritten!**

**Heurismus:**

Zerlege dein Problem

- vom Start her:  
Was kannst du aus den gegebenen Daten folgern?
- vom Ziel her:  
Was musst du wissen, um die Frage zu beantworten?
- Kannst du in Zwischenschritten vom Start zum Ziel kommen?

**Strategie:** Nutze die Analogie!

**Heurismus:**

- Kommt dir die Aufgabe vor wie eine andere Aufgabe, die du lösen kannst?
- Untersuche die Ähnlichkeit.

## Rechen-Strategien      Heurismen

subjektiv gefärbt

immer verbunden mit dem

**Risiko des Scheiterns**

unerlässlich für

*erfolgreiches Problemlösen*

## Vertiefung des Zahlverständnisses

### Begriffsnetz Zahl

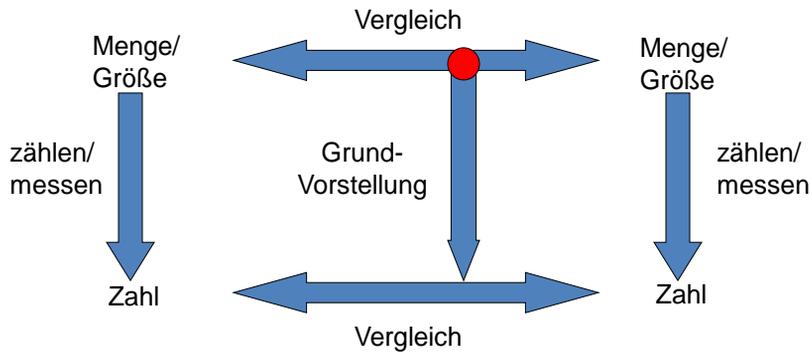
Mein Kind kennt schon die Zahlen!



**Kleiner-Größer-Beziehung zwischen Zahlen**

## Vertiefung des Zahlverständnisses

### ➤ Kleiner-Größer-Beziehung zwischen Zahlen



## Vertiefung des Zahlverständnisses

### ➤ Zahleigenschaften „gerade“ und „ungerade“

