

Halbschriftliches Rechnen

- Kernlehrplan Mathematik für die Grundschule
- Flexibles Rechnen – Rechenstrategien
- Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben
- Kennzeichen halbschriftlichen Rechnens
- Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren
- Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

3

Ministerium für Schule und Weiterbildung – NRW Lehrplan Mathematik für die Grundschule des Landes NRW

Bereich: Zahlen und Operationen Schwerpunkt: Schnelles Kopfrechnen

Kompetenzerwartungen am Ende der

Schuleingangsphase

Die Schülerinnen und Schüler

- verfügen über Kenntnisse und Fertigkeiten beim schnellen Kopfrechnen im Zahlenraum bis 100 (z. B. *erfassen schnell strukturierte Anzahlen, ergänzen auf Stufenzahlen, rechnen mit Zehnerzahlen, zählen vorwärts- und rückwärts in Schritten, verdoppeln und halbieren*)
- geben die **Kernaufgaben** und einzelne weitere Aufgaben **des kleinen Einmaleins** automatisiert wieder

Klasse 4

- übertragen ihre Kenntnisse und Fertigkeiten im schnellen Kopfrechnen auf **analoge Aufgaben** im erweiterten Zahlenraum
- geben **alle Zahlensätze des kleinen Einmaleins** automatisiert wieder und leiten deren Umkehrungen sicher ab

Bereich: Zahlen und Operationen
Schwerpunkt: Zahlenrechnen

Kompetenzerwartungen am Ende der Klasse 4

Die Schülerinnen und Schüler

- lösen Aufgaben **aller vier Grundrechenarten** unter Ausnutzung von **Rechengesetzen** und **Zerlegungsstrategien** mündlich oder halbschriftlich (auch unter Verwendung von Zwischenformen)
- nutzen Zahlbeziehungen bei **allen vier Grundrechenarten** für **vorteilhaftes Rechnen**
- **beschreiben** und **bewerten unterschiedliche Rechenwege** unter dem Aspekt des **vorteilhaften Rechnens** und stellen sie übersichtlich schriftlich dar

5

Bereich: Zahlen und Operationen
Schwerpunkt: Flexibles Rechnen

Kompetenzerwartungen am Ende der

Schuleingangsphase

Klasse 4

Die Schülerinnen und Schüler

- nutzen **aufgabenbezogen** oder nach **eigenen Präferenzen** eine **Strategie** des Zahlenrechnens (z. B. **stellenweise**, **schrittweise**, **Hilfsaufgabe**)
- nutzen **aufgabenbezogen** oder nach **eigenen Präferenzen**
 - eine **Strategie** des Zahlenrechnens,
 - ein schriftliches **Normalverfahren**
 - oder den **Taschenrechner** (z. B. als Rechenwerkzeug beim Erforschen von Zusammenhängen)

6

Flexibles Rechnen

- setzt voraus
- ist erfolgreich im

Zusammenspiel

- eines relativ gesättigten Bestandes an
- und eines hinreichenden Bestandes an



7



Rechenstrategien

- setzen einen Bestand an Rechen-Sätzen voraus
- dienen der Vernetzung von Rechen-Sätzen
- ermöglichen Selbst-Kontrolle
- sind Anwendungen von arithmetischen Gesetzen

8

Flexibles Rechnen
Rechenstrategien

Strategie: **Zerlege in einfachere Teilaufgaben!**

Rechne in Schritten!

**Große Schritte,
kleine Schritte!**

Rechne mit Bündeln!



Flexibles Rechnen
Rechenstrategien

Strategie: **Vereinfache die Aufgabe!**

**Eine Zahl vereinfachen,
anschließend
das Ergebnis "korrigieren"!**

**Andere Aufgabe,
das selbe Ergebnis!**



Hintergrund:
Monotonie-Gesetze

Hintergrund:
Konstanz-Gesetze

Flexibles Rechnen Rechenstrategien

Strategie: **Vereinfache die Aufgabe!**

Eine Zahl vereinfachen,
anschließend
das Ergebnis "korrigieren"!

$249 + 80$

$19 \cdot 8$

Andere Aufgabe,
das selbe Ergebnis!

$541 + 27$

$270 : 5$

Gibt es eine einfache Nachbaraufgabe?

- Aufgabe mit Schwellenzahl
- Verdopplungsaufgabe
- ...

„Blick“ für den Zusammenhang
zwischen dem numerischen Material
und der „zweckmäßigen“ Gesetzmäßigkeit

Zahlenblick¹¹

Flexibles Rechnen Rechenstrategien

Strategie: **Nutze die Analogie!**

$150 + 30$

$15 + 3 = 18$

$50 + 30 = 80$

$15 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = (15 + 3) \cdot 10$

Distributiv-Gesetz

$(100 + 50) + 30 = 100 + (50 + 30)$

Assoziativ-Gesetz

Hintergrund:
„Klammer“-Gesetze

Finde weitere
Beispiele

12

Flexibles Rechnen Rechenstrategien

Strategie: Zerlege in einfachere Teilaufgaben!

Strategie: Erst vereinfachen, dann "korrigieren"!

Strategie: Andere Aufgabe, dasselbe Ergebnis!

Strategie: Nutze die Analogie!

Das Erkennen

der „leichten“ Aufgabe oder der „analogen“ Aufgabe,
der „Anker“-Aufgabe oder der „Stütz“-Aufgabe,
ist **nicht selbstverständlich**, hängt ab

- von der **Operation**,
- vom numerischen Material,
- von der **eigenen Einschätzung** und der **Vorerfahrung**.

Zahlenblick 13

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben

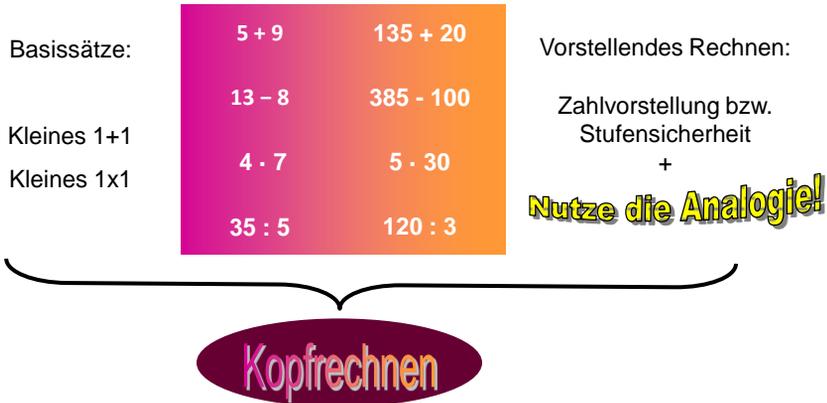
	rot	orange	gelb	grün	blau
+	5 + 9	135 + 20	139 + 28	598 + 270	7231 + 3896
-	13 - 8	385 - 100	83 - 26	598 - 270	7231 - 3896
•	4 · 7	5 · 30	3 · 17	3 · 912	367 · 912
:	35 : 5	120 : 3	72 : 4	693 : 7	8391 : 61

Nach Stuart Plunkett (1987):

Wie weit müssen Schüler heute noch die schriftlichen Rechenverfahren beherrschen?

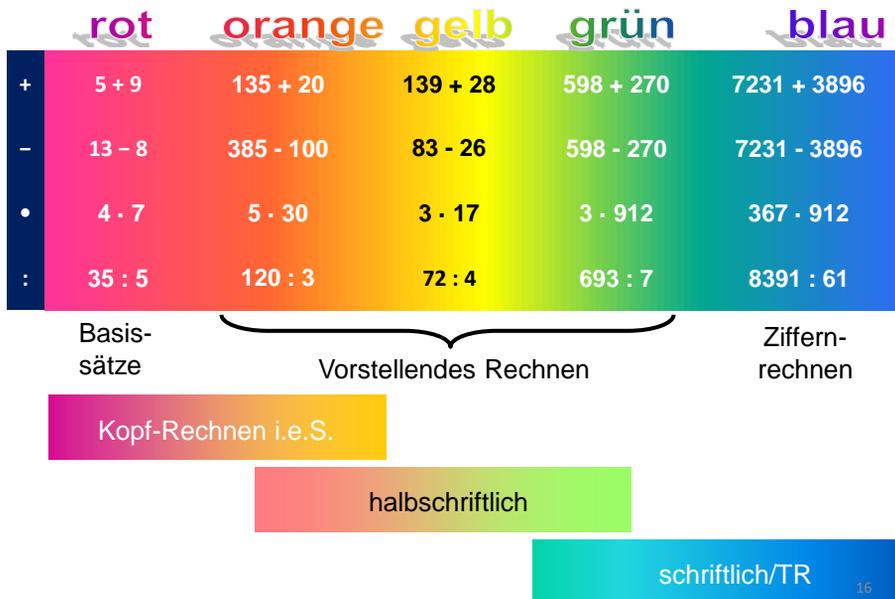
In: Mathematik lehren 21, H.4, S. 43-46

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben



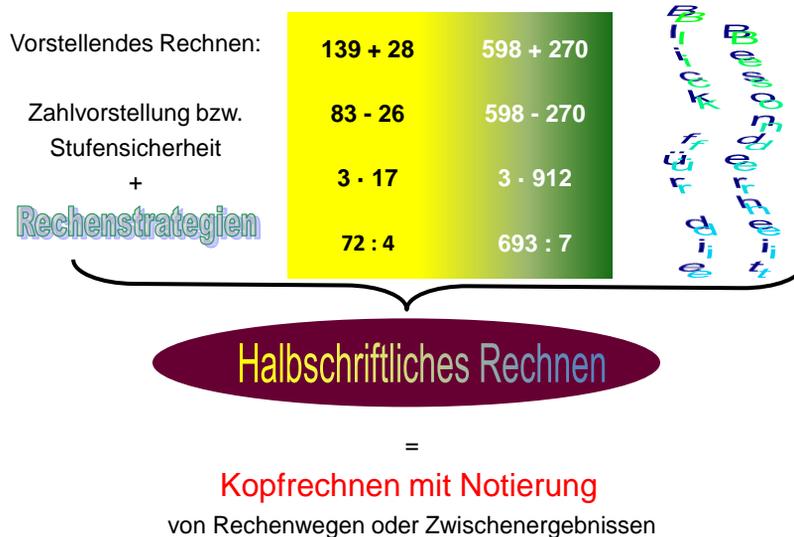
15

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben



16

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben



17

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben

Kopfrechnen

Halbschriftliches Rechnen

Schriftliches Rechnen

„Beim Kopfrechnen operieren wir mit lebendigen Zahlen,

beim schriftlichen Rechnen operieren wir mit den Ziffern der verschiedenen Stellenwerte.

Seinem Wesen nach ist das halbschriftliche Rechnen ein Kopfrechnen.

Zur Entlastung des Gedächtnisses werden (die) einzelne(n) rechnerische Teilschritte schriftlich fixiert.

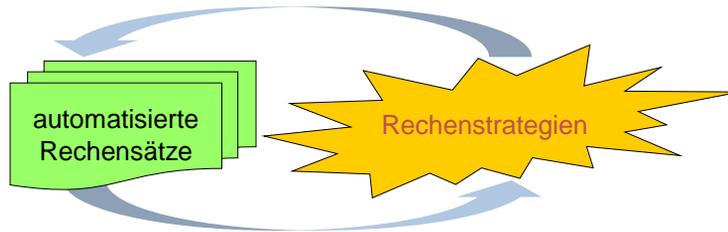
Psychologisch wichtig ist es, dass die halbschriftlichen Rechenformen besonders geeignet sind, vor einem rein mechanischen Rechnen zu bewahren und auch bei schwachen Schülern nach und nach durch eigenes Tun zu einer vertieften und gesicherten Einsicht führen.“

Wilhelm Oehl 1961

Das „Regenbogen“-Spektrum der Rechenaufgaben

Die Grenzen zwischen Kopfrechnen und halbschriftlichem Rechnen sind fließend.

- Gedächtnismäßige Beherrschung der Basissätze
- Analoge Beherrschung der Zahlenräume
- Beherrschung von Rechenstrategien



Bestand variiert von Kind zu Kind

Die Grenzen zwischen halbschriftlichem und schriftlichem Rechnen sind fließend.

Kennzeichen halbschriftlichen Rechnens

Halbschriftliches Rechnen ist gekennzeichnet durch

Offenheit des Weges und **Offenheit der Notierung**

Die Wahl des Weges ist

- subjektiv und sozial bedingt → „Wie habe ich es früher gemacht?“
„Wie macht es Sabine?“
- numerisch bedingt → $179 + 16$
 $124 + 16$
- kontext-abhängig → $312 - 150$
 $3,12\text{DM} - 1,50\text{DM}$

Kennzeichen halbschriftlichen Rechnens

Beim halbschriftlichen Rechnen werden **Zwischen-Schritte** und/oder **Zwischen-Ergebnisse** notiert.

Die Notierung dient

- der Entlastung des Gedächtnisspeichers
- dem Ordnen des Denkens;
d.h. zum eigenen Verständnis
und zur Mitteilung an andere

Offenheit der Notierung

Die Wahl der Notierung ist

- subjektiv und sozial bedingt → „Wie habe ich es früher gemacht?“
„Wie macht es Sabine?“
- kontext-abhängig → Situationsbilder
Schemata
- weg-abhängig → Strategie ↔ Notierung

21

Kennzeichen halbschriftlichen Rechnens

Halbschriftliches Rechnen ist gekennzeichnet durch

**Offenheit
des Weges**

und

**Offenheit
der Notierung**

Es gibt
das Recht auf

kürzere und längere Wege

kürzere und längere Notierungen

Routinewege und Sonderwege

Konventionen und Eigenprodukte

... und das Recht (auch des Anderen), sie zu verstehen.

22

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

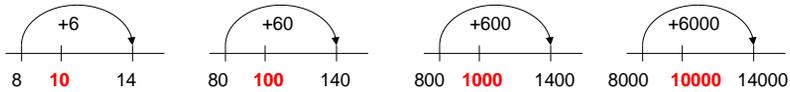
Strukturierte **Orientierung** im neuen Zahlenraum

Kopfrechnen

orange

$4 + 3$	$8 + 6$	vierzehn
$40 + 30$	$80 + 60$	hundertvierzig
$400 + 300$	$800 + 600$	eintausendvierhundert
$4000 + 3000$	$8000 + 6000$	vierzehntausend

Vorstellendes Rechnen: Größenvorstellung der Zahlen



Nutze die Analogie!

Aber:

Die Umgangssprache unterstützt die Analogie zwischen $8 + 6 = 14$ und $8000 + 6000 = 14000$, aber nicht zwischen $8 + 6 = 14$ und $800 + 600 = 1400$.

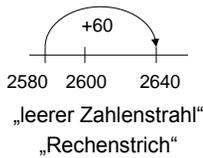
23

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

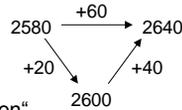
Die Grenzen zwischen Kopfrechnen und halbschriftlichem Rechnen sind fließend.

Überschreiten von Schwellenzahlen

$8 + 6$	$58 + 6$	$258 + 6$
$80 + 60$	$580 + 60$	$2\ 580 + 60$
$800 + 600$	$5800 + 600$	$25\ 800 + 600$



„Pfeil-Darstellungen“
„Pfeil-Bilder“



Stufensicherheit	$2045 + 5$
	$2045 + 50$
	$2045 + 500$
	$2045 + 5000$

orange

Vorstellendes Rechnen:
Zahlvorstellung bzw.
Stufensicherheit

Nutze die Analogie!

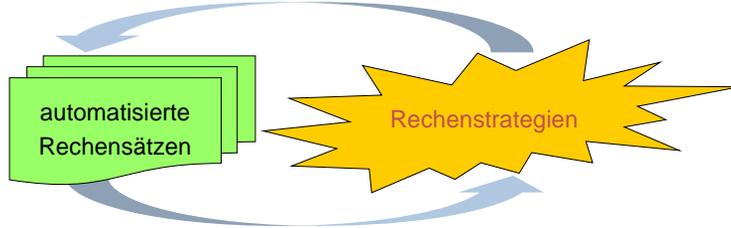
24

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Entscheidend für erfolgreiches Rechnen ist ein wachsender Bestand an verfügbaren Rechensätzen und Rechenstrategien.

Halbschriftliches Rechnen

Offenheit des Weges



Rechenstrategien

- setzen einen Bestand an Rechensätzen voraus
- dienen der Vernetzung von Rechensätzen
- ermöglichen Selbstkontrolle
- sind Anwendungen von arithmetischen Gesetzen

25

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Strategie: Zerlege in einfachere Teilaufgaben!
Rechne in Schritten!

Große Schritte, kleine Schritte!

Rechne mit Bündeln!

Hintergrund: **Assoziativ-Gesetz**

Erst bis zur Ankerzahl, dann weiter!

Hintergrund: **Stellenwertprinzip**

Offenheit des Weges

Erkläre an Beispielen:

$$\begin{array}{l} 580 + 76 \\ 536 + 27 \\ 570 + 250 \\ 508 + 206 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 520 - 76 \\ 573 - 27 \\ 530 - 270 \\ 503 - 208 \end{array}$$

Finde weitere Beispiele

26

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Strategie: Vereinfache die Aufgabe!

Offenheit des Weges

Eine Zahl vereinfachen,
anschließend
das Ergebnis "korrigieren"!

Hintergrund:
Monotonie-Gesetze

Andere Aufgabe,
das selbe Ergebnis!

Hintergrund:
Konstanz-Gesetze

Erkläre an Beispielen:

$$580 + 79$$

$$541 + 27$$

$$590 + 250$$

$$508 + 298$$

$$520 - 79$$

$$571 - 27$$

$$530 - 290$$

$$502 - 250$$

Finde weitere
Beispiele

27

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Offenheit des Weges

Große Schritte,
kleine Schritte!

Rechne mit Bündeln!

Erst bis zur Ankerzahl,
dann weiter!

Kombinationen
sind möglich

Was möglich ist,
geschieht!

Zerlege in einfachere Teilaufgaben!

Vereinfache die Aufgabe!

Eine Zahl vereinfachen,
anschließend
das Ergebnis "korrigieren"!

Andere Aufgabe,
das selbe Ergebnis!

28

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Offenheit des Weges



Im Prinzip kann man die gleichen Strategien im „grünen“ Bereich einsetzen.

„Aber im Großen und Ganzen haben nur wenige Menschen das Bedürfnis dazu.“
S. Plunkett

29

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Offenheit des Weges

Rechenstrategien

- abhängig von der Rechenoperation, ihren Gesetzmäßigkeiten und deren Kenntnis
- abhängig vom numerischen Material der Aufgabe (es gibt keine Universal-Strategie)
- **subjektiv gefärbt** („leichter/einfacher für mich“)
- immer verbunden mit dem **Risiko des Scheiterns**
- unerlässlich für **erfolgreiches Rechnen**

Kompetenzerwartung

Die Schülerinnen und Schüler nutzen aufgabenbezogen oder nach eigenen Präferenzen eine **Strategie des Zahlenrechnens**

30

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

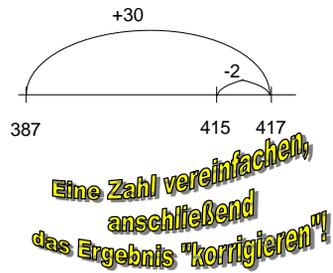
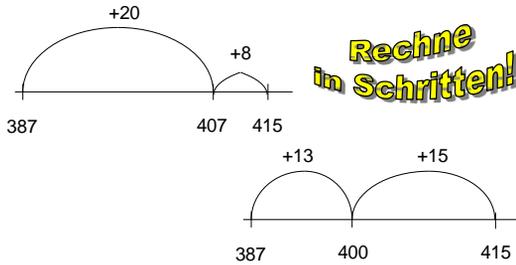
Offenheit der Notierungen

Notationsform und Rechenstrategie sind nicht unabhängig.

ikonisierend $234 + 302 = 536$



Rechenstrich $387 + 28$

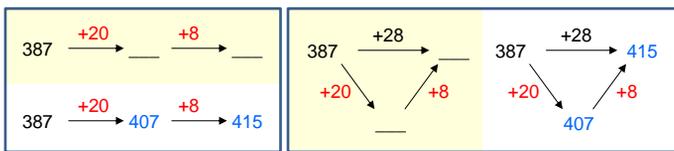


Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

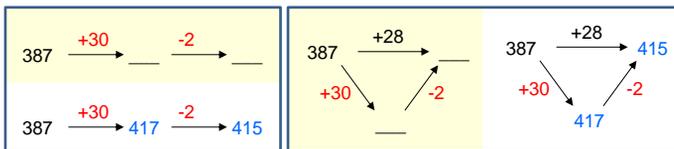
Offenheit der Notierungen

Pfeil-Bilder

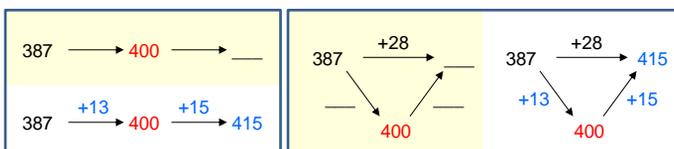
$387 + 28$



Große Schritte, kleine Schritte!



Eine Zahl vereinfachen, anschließend das Ergebnis "korrigieren"!



Erst bis zur Ankerzahl, dann weiter!

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Neben-Rechnung

$387 + 28$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = \\ 387 + 20 = 407 \\ 407 + 8 = 415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = \\ 387 + 8 = 395 \\ 407 + 20 = 415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = \\ 387 + 30 = 417 \\ 417 - 2 = 415 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = \\ 380 + 20 = 400 \\ \underline{7 + 8 = 15} \\ (400 + 15 = 415) \end{array}$$

Offenheit der Notierungen

**Rechne
in Schritten!**

**Eine Zahl vereinfachen,
anschließend
das Ergebnis "korrigieren"!**

**Rechne
mit Bündeln!**

Notierung/Streichung von Zwischenergebnissen

$387 + 28$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = 415 \\ \hline \cancel{407} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 + 28 = 415 \\ \hline \cancel{418} \end{array}$$

33

Halbschriftliches Addieren und Subtrahieren

Halbschriftliches Rechnen ist gekennzeichnet durch

**Offenheit
des Weges**

und

**Offenheit
der Notierung**

Es gibt
das Recht auf

kürzere und längere Wege

kürzere und längere Notierungen

Routinewege und Sonderwege

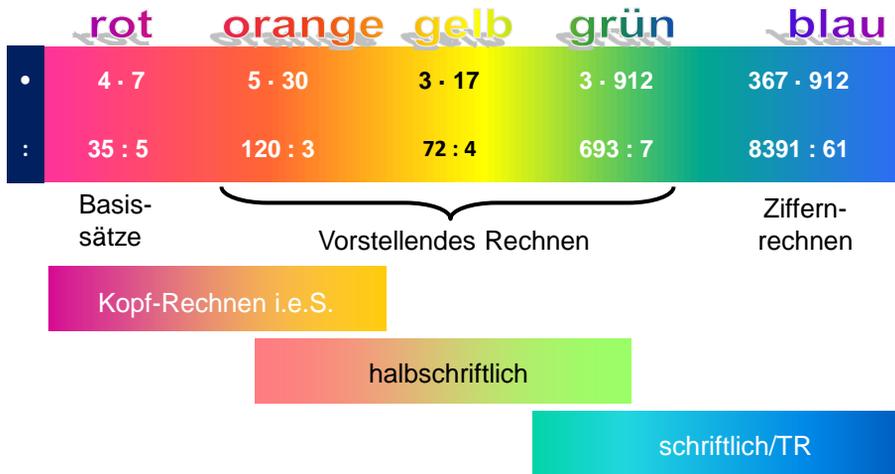
Konventionen und Eigenprodukte

... und das Recht (auch des Anderen), sie zu verstehen.

... und weiter mit dem Multiplizieren und Dividieren

34

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren



35

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

orange

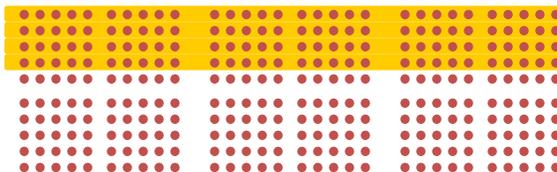
Vorstellendes Rechnen: Größenvorstellung der Zahlen

Einmaleins der Zehner (Klasse 3)

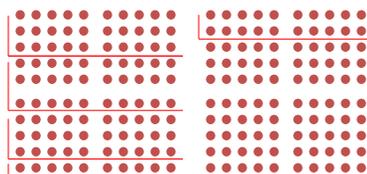
Beispiel: 30er-Reihe

$$4 \cdot 30$$

a) $4 \cdot 30$ am Tausender-Streifen (Feld-Darstellung)



Kommutativität
sichtbar
Überschreiten der
Schwellenzahl 100
nicht sichtbar



Kommutativität
nicht sichtbar
Überschreiten der
Schwellenzahl 100
sichtbar

Kopfrechnen

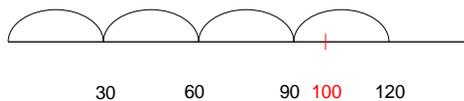
36

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

Beispiel: 30er-Reihe

$$4 \cdot 30$$

b) $4 \cdot 30$ am Zahlenstrahl (wiederholtes Addieren)



c) $4 \cdot 30$ mit Bündeln gerechnet

$$4 \cdot 30 = 4 \cdot 3 \text{ Z} = 12 \text{ Z} = 120$$

bündeln

entbündeln

Hintergrund: Assoziativ-Gesetz

$$4 \cdot (3 \cdot 10) = (4 \cdot 3) \cdot 10$$

In den Darstellungen b) und c) ist $4 \cdot 30$ etwas Anderes als $30 \cdot 4$.

Die Kommutativität gehört zum Grundverständnis der Multiplikation. Sie muss bei der Einführung grundgelegt werden, damit sie hier angewendet werden kann.

37

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

orange

Vorstellendes Rechnen: Größenvorstellung der Zahlen

Einmaleins der Hunderter (Klasse 4)

kann analog zu den Zehnern aufgebaut werden

oder

zusammen mit dem

Einmaleins der Tausender,

um Unterschiede in der Sprache deutlich zu machen.

bündeln

entbündeln

$$4 \cdot 300 = 4 \cdot 3 \text{ H} = 12 \text{ H} = 1200$$

eintausendzweihundert

$$4 \cdot 3000 = 4 \cdot 3 \text{ T} = 12 \text{ T} = 12000$$

zwölftausend

Kopfrechnen

38

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

orange

Vorstellendes Rechnen: Größenvorstellung der Zahlen

Dividieren als Umkehrung des Multiplizierens

im Bereich

Einmaleins der Zehner (Klasse 3)

Einmaleins der Hunderter (Klasse 4)

Einmaleins der Tausender (Klasse 4)

$$120 : 30 = 4 \quad \text{denn } 4 \cdot 30 = 120$$

$$120 : 4 = 30 \quad \text{denn } 30 \cdot 4 = 120$$

$$1200 : 300 = 4 \quad \text{denn } 4 \cdot 300 = 1200$$

$$1200 : 4 = 300 \quad \text{denn } 300 \cdot 4 = 1200$$

Kopfrechnen

39

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

Halbschriftliches Multiplizieren

Vorstellendes Rechnen:

Zahlvorstellung bzw.
Stufensicherheit
+

Rechenstrategien

$$3 \cdot 17$$

$$3 \cdot 98$$

$$3 \cdot 170$$

$$3 \cdot 298$$

$$3 \cdot 107$$

$$3 \cdot 2098$$



Kopfrechnen mit Notierung

von Rechenwegen oder Zwischenergebnissen

40

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

Multiplizieren von ZE-Zahlen (Klasse 3)

Strategie: Zerlege in einfachere Teilaufgaben!

Rechne mit Bündeln!

Beispiel: 4 · 23

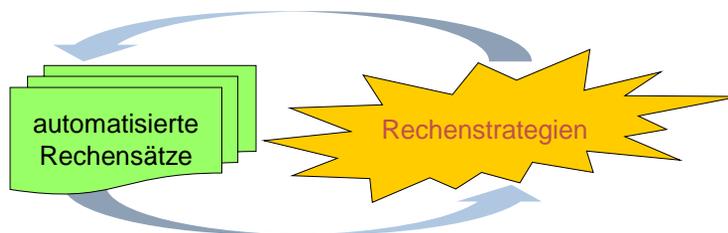
20	20	20	20	$4 \cdot 20 = 80$
① ① ①	① ① ①	① ① ①	① ① ①	$4 \cdot 3 = 12$
				$4 \cdot 23 = 92$

Die Notierung dient

- der Entlastung des Gedächtnisspeichers
- dem Ordnen des Denkens;
d.h. zum eigenen Verständnis
und zur Mitteilung an andere

41

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren



Automatisierung besonderer Reihen:

11er-Reihe

12er-Reihe

(15er-Reihe)

25er-Reihe

Welche Zahl gehört zur 12er-Reihe?

26 36 50 60 74 84 96 106

4 · 25 5 · 25 150 = · 25

8 · 25 7 · 25 225 = · 25

Die Grenzen zwischen Kopfrechnen und halbschriftlichem Rechnen sind fließend.

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

Multiplikand mit zwei „geltenden“ Ziffern (d.h. nur zwei Ziffern ungleich Null) (Klasse 4)

d.h. nur auf zwei Bündelungsstufen gibt es auch Bündel

Beispiele:

$4 \cdot 230$

$4 \cdot 203$

$4 \cdot 2030$

$4 \cdot 2300$

Stufensicherheit + Rechenstrategie

Hintergrund: Distributiv-Gesetz

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Die gleiche Rechen-Strategie (mit „minus“) hilft auch im „grünen“ Bereich.

$3 \cdot 298 = 894$
$3 \cdot 300 = 900$
$3 \cdot 2 = 6$

$3 \cdot 98$
$3 \cdot 298$
$3 \cdot 2098$

43

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

Halbschriftliches Dividieren

Vorstellendes Rechnen:

$42 : 3$	$297 : 3$
----------	-----------

Zahlvorstellung bzw.
Stufensicherheit

$420 : 3$	$2097 : 3$
-----------	------------

+

$4200 : 3$	$2970 : 3$
------------	------------

Rechenstrategien

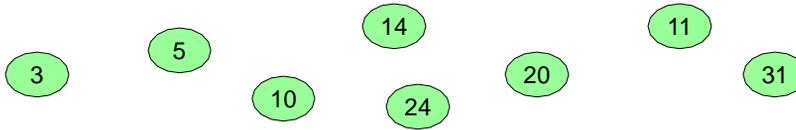


Kopfrechnen mit Notierung

von Rechenwegen oder Zwischenergebnissen

Die Grenzen zwischen halbschriftlichem und schriftlichem Rechnen sind fließend.

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren



Aus zwei Zahlen kann man immer **eine plus- oder mal-Aufgabe** (mit der Tausch-Aufgabe sogar zwei) und **eine minus-Aufgabe** machen, wo das Ergebnis wieder eine natürliche Zahl ist.

Aber nicht immer eine durch-Aufgabe!

~~Dividieren ist anders!~~

~~Erfolgreiches Dividieren~~

setzt schon bei kleinen Zahlen voraus:

Überblick über die Ergebniszahlen der Einmaleins-Reihen

45

Halbschriftliches Multiplizieren und Dividieren

~~Erfolgreiches Dividieren~~

setzt voraus

schon bei kleinen Zahlen

Überblick über die Ergebniszahlen der Einmaleins-Reihen

dazu bei größeren Zahlen

Stufensicherheit beim Multiplizieren und Dividieren

$$2400 : 6 = 400 \text{ denn } 6 \cdot 400 = 2400$$

und dann

Strategie des Teilens:

Erst das Grobe, dann das Feine!

$138 : 6 = 23$
$120 : 6 = 20$
$18 : 6 = 3$

46

Halbschriftliches Rechnen

ist vorstellendes Rechnen,
setzt an der Größenvorstellung der Zahlen an („Stufensicherheit“).
Daher ist es nahe liegend, mit den großen Bündeln zu beginnen.

Folge: **Bruch**
beim Übergang zu den **schriftlichen** Rechenverfahren beim

Addieren

Subtrahieren

Multiplizieren

Dividieren ist anders!

Strategie des Teilens:

Erst das Grobe, dann das Feine!

gilt auch beim
schriftlichen
Dividieren!

47