

Elemente der Analysis

Kurz-Skript WS 2008/09

(ohne ausführliche Beispiele, Erläuterungen und Beweise)

Prof. Dr. Hans-Dieter Rinkens

Inhaltsverzeichnis

0. Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik (Funktionen und Analysis)

1. Zählen und Messen

1.1. Die natürlichen Zahlen als Zählzahlen und Anzahlen – „unendlich“

1.2. Folgen

1.3. Maßzahlen – natürliche Zahlen, Brüche, reelle Zahlen

1.4. Zahlengerade und Intervallschachtelung – Dezimalbrüche

2. Konvergenz und Grenzwert

2.1. Nullfolgen - das ε -Spiel

2.2. Grenzwert versus Häufungspunkt

2.3. Besondere Folgen: geometrische Reihen und harmonische Reihe

2.4. Konvergenzkriterien – Intervallschachtelung – Vollständigkeit

3. Flächen- und Rauminhalt

3.1. Flächenbestimmung in der Antike

3.2. Integral und Integrierbarkeit

3.3. Grundvorstellungen des Integrierens

4. Funktionen

4.1. Grundlegende Eigenschaften

4.2. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit -
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

0. Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik (Auszug)
(Empfehlungen von DMV, GDM, MNU) Juni 2008

Das Anliegen dieser Empfehlungen ist es, den Zusammenhang zu bedeutsamen Inhalten des Studiums herzustellen. Welche Kompetenzen lassen sich in besonderer Weise an welchen Inhalten entwickeln bzw. welchen Beitrag leistet der jeweilige Inhalt zum Kompetenzprofil der angehenden Mathematiklehrkraft? Für die Mathematik als Kernfach der Schule ist es dabei unabdingbar, den Unterricht von der ersten Klasse bis zu den verschiedenen Schulabschlüssen als fortlaufenden Prozess in den Blick zu nehmen.

Für die *fachlichen* Standards sind als Hinweis zu einer Ausdifferenzierung bei der Umsetzung in entsprechende Curricula vier Kategorien angegeben. Diese sind nach inhaltlicher Ausweitung, begrifflicher Elaboriertheit und Grad der Abstraktion und Formalisierung gestaffelt. Ihre Reihung ist im Sinne zunehmender Intensität zu verstehen. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass auf jeder Stufe die Inhalte und Konzepte der davor liegenden Stufen geeignet integriert werden sollen. Dabei sollte folgenden Zielsetzungen Rechnung getragen werden:

- Die Studierenden erfahren mathematische Wissensbildung als progressiven Prozess, der von Denkhandlungen wie Abstraktion, Verallgemeinerung, Präzisierung und Formalisierung getragen wird und die kreative Entwicklung gedanklicher Ordnungsmittel erfordert.
- Sie erwerben damit nicht nur ein vertieftes Verständnis mathematischer Inhalte, sondern auch Sichtweisen, die für die Fähigkeit zum genetischen Lehren unabdingbar sind.

<p><i>Diese Kompetenzen betreffen die im Alltag relevante Mathematik und ihre begriffliche Beschreibung.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet, auch dann, wenn sie kein Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik als Mittel, die Alltagsmathematik von einem übergeordneten Standpunkt aus zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik gleich in welcher Jahrgangsstufe unterrichtet und ein stufenspezifisches Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen unterrichtsrelevante Werkzeuge, Begriffe und Verfahren der Elementarmathematik und die Möglichkeit, diese von einem höheren Standpunkt zu durchdringen, zu reflektieren und in ihrem Rahmen Probleme zu lösen.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft darüber hinaus verfügen, die Mathematik in den Sekundarstufen unterrichtet und ein schulformspezifisches Fachstudium absolviert hat.</p>	
<p><i>Diese Kompetenzen betreffen exemplarisch die Kenntnis weiterführender mathematischer Theoriebildungen mit ihren spezifischen Mechanismen und der je eigenen Leistungsfähigkeit zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.</i> Über diese Kompetenzen soll eine Lehrkraft zusätzlich verfügen, die Mathematik in der Sekundarstufe II unterrichtet.</p>	

Funktionen und Analysis – Funktionales und infinitesimales Denken

Charakteristisch für die Analysis ist der systematisierende Umgang mit dem unendlich Kleinen (und Großen). Davon handeln die zentralen Begriffe Grenzwert, Ableitung und Integral. Sie handeln ebenso von der grundlegenden Idee des funktionalen Denkens. Beides – die Erfahrung des erfolgreichen Umgangs mit dem Unendlichen und die Erziehung zum funktionalen Denken – gehört zum Kern des allgemeinbildenden Werts der Analysis, begründet ihre breite Anwendbarkeit und trägt substantiell zu einem gültigen Bild der Mathematik als Kulturleistung bei.

<i>Bereiche</i>	Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse	
	Die Studierenden	
<i>Funktionen</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ verwenden Abbildungen als universelles Werkzeug (z.B. Kongruenzabbildungen, Permutationen, Folgen) und beschreiben sie mit Hilfe charakterisierender Eigenschaften (z.B. Bijektivität) ▪ arbeiten mit Funktionen in verschiedenen Darstellungen (Tabelle, Graph, Term) und unter verschiedenen Aspekten (Einsetzungs-, Veränderungs- und Objektaspekt) ▪ erläutern inner- und außermathematische Situationen, in denen die Abhängigkeit von mehreren Variablen eine Rolle spielt 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ nutzen elementare Funktionen zur Beschreibung realer Prozesse und innermathematischer Zusammenhänge und erläutern grundlegende Eigenschaften (Monotonie, Umkehrbarkeit) 	
<i>Grenzwert</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ erläutern einen präformalen Grenzwertbegriff an tragenden Beispielen 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ beschreiben die Vollständigkeitseigenschaft der reellen Zahlen und erläutern ihre Bedeutung an Beispielen 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ definieren den Begriff des Grenzwerts für Folgen und Reihen sowie die Vollständigkeit der reellen Zahlen und verwenden diese Begriffe formal sicher 	
<i>Ableitung</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ interpretieren den Begriff der Ableitung als lokale Änderungsrate und setzen ihn in Anwendungszusammenhängen ein 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ interpretieren die Ableitung als Instrument der lokalen Linearisierung ▪ untersuchen Eigenschaften von Funktionen mit analytischen Mitteln 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ definieren die Begriffe Stetigkeit und Differenzierbarkeit formal und begründen zentrale Aussagen über stetige und differenzierbare Funktionen ▪ verwenden die Idee der Differenzialgleichung zur Charakterisierung von Funktionen und zur Modellbildung 	
<i>Integral</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ beschreiben die Idee der Flächenmessung mittels infinitesimaler Ausschöpfung an Beispielen 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ interpretieren das Integral als Bilanzieren und als Mittelwertbildung und setzen es in Anwendungszusammenhängen ein ▪ begründen den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung anschaulich 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ definieren den Begriff des (Riemann-)Integrals formal und verwenden ihn in mathematischen Zusammenhängen 	
<i>Vernetzungen und Verallgemeinerungen</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ beschreiben und verwenden die Differenziation und Integration von Funktionen mehrerer Veränderlicher ▪ nutzen die Begriffe der Analysis zur Darstellung von Kurven und Flächen im Raum ▪ nutzen das Integral zur Arbeit mit stetigen Verteilungen in der Stochastik 	
<i>Neue Medien</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ nutzen Software zur Darstellung und Exploration funktionaler Zusammenhänge und infinitesimaler Phänomene und reflektieren ihre Verwendung kritisch 	

Arithmetik und Algebra – Denken in Zahlen und Strukturen (Auszug)

Der Themenkreis Arithmetik und Algebra erstreckt sich auf Zahlen und ihre Verwendung, das systematische Operieren mit Zahlen und schließlich die Algebra als formale Durchdringung und Verallgemeinerung. Er umspannt eine lange historische Entwicklung, die durch die geistige Gestaltungskraft typischer mathematischer Denkhandlungen wie Abstrahieren, Ordnen und Strukturieren, Generalisieren und Formalisieren getragen ist.

<i>Bereiche</i>	Kompetenzen bezogen auf Inhalte und Prozesse	
	Die Studierenden	
<i>Zahlen, Zahl-darstellungen, Zahlensystem</i>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ kennen Darstellungsformen für natürliche Zahlen, Bruchzahlen und rationale Zahlen und verfügen über Beispiele, Grundvorstellungen und begriffliche Beschreibungen für ihre jeweilige Aspektvielfalt ▪ beschreiben die Fortschritte im progressiven Aufbau des Zahlensystems und argumentieren mit dem Permanenzprinzip als formaler Leitidee ▪ ermessen die kulturelle Leistung, die in der Entwicklung des Zahlbegriffs und des dezimalen Stellenwertsystems steckt 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ beschreiben die Grenzen der rationalen Zahlen bei der theoretischen Lösung des Messproblems ▪ geben Beispiele für den Umgang der Mathematik mit dem unendlich Großen und mit dem unendlich Kleinen (z.B. Mächtigkeit, Dichtheit) 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ erläutern die Vollständigkeit und weitere Eigenschaften der reellen Zahlen an Beispielen 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ verwenden Axiomatik und Konstruktion zur formalen Grundlegung von Zahlbereichen (bis hin zu den komplexen Zahlen) und beherrschen dazu begriffliche Werkzeuge wie Äquivalenzklassen und Folgen 	

1. Zählen und Messen

1.1. Die natürlichen Zahlen als Zählzahlen und Anzahlen – „unendlich“

„Wie heißt die größte natürliche Zahl?“ (T., 9J)

Was kann gemeint sein?

- Die größte Zahl mit einem eigenen Namen (z.B. Billiarde)
- Das „Ende des Zählens“

Ein Ende des Zählens gibt es nicht; denn es gilt:

Sage mir die vermeintlich größte Zahl und ich sage dir eine noch größere, z.B. den Nachfolger.

Das ist eine der wichtigsten Eigenschaften der natürlichen Zahlen, das **Zähl-Axiom**. Das ist zugleich ein Verfahren, um zu beweisen, dass eine Menge M **unendlich viele** Elemente hat, nämlich durch einen sog. Widerspruchsbeweis, der zeigt, dass die Annahme, M sei endlich falsch ist. Das Verfahren hat folgende Schritte:

- M sei eine Menge mit einer bestimmten Eigenschaft (z.B. natürliche Zahlen, Primzahlen, ...)
- Nimm an, M habe nur endlich viele Elemente. Liste sie alle auf.
- Zeige – wie, das hängt von der Menge M ab – , dass es ein Element mit der charakteristischen Eigenschaft von M gibt, das nicht in der Liste steht.
- Also war die Liste unvollständig und die Annahme, es gäbe eine endliche Liste mit allen Elementen von M , falsch.

„Unendlich“ heißt also hier „nicht endlich“ und „endlich“ heißt, durch Abzählen bis zu einer bestimmten natürlichen Zahl auflisten.

Die **Anzahl** einer Menge M kann man durch Abzählen bestimmen oder durch Vergleich mit einer Menge N , deren Anzahl man schon kennt. Vergleich bedeutet:

Ordne jedes Element von M einem Element von N zu, und zwar so, dass verschiedene Elemente von M verschiedenen Elementen von N zugeordnet werden („injektiv“) und dass alle Elemente von N durch die Zuordnung getroffen werden („surjektiv“). Wenn beides zugleich („bijektiv“) gelingt, haben M und N **gleich viele** Elemente.

(Diese Art der Zuordnung hat viele Namen: **ein-eindeutige Zuordnung, umkehrbar eindeutige Zuordnung, bijektive Abbildung, bijektive Funktion.**)

Dieses Verfahren lässt sich nicht nur auf endliche, sondern auch auf unendliche Mengen anwenden. Georg Cantor (1845-1918), der „Erfinder der Mengenlehre“, hat dies systematisch getan und damit Ordnung in die Welt des Unendlichen gebracht (Kardinalzahl-Theorie). Man kann zeigen: Es gibt im Sinne der ein-eindeutigen Zuordnung genau so viele natürliche Zahlen wie gerade Zahlen, wie Quadratzahlen, wie ganze Zahlen, wie Bruchzahlen (1. Cantorsches Diagonalverfahren). Und durch einen Widerspruchsbeweis: Es gibt mehr reelle Zahlen als natürliche Zahlen (2. Cantorsches Diagonalverfahren); es gibt mehr reelle Funktionen als reelle Zahlen.

Dass es genau so viele Elemente in einer echten Teilmenge einer Menge gibt wie in der Menge selbst, kann bei endlichen Mengen nicht passieren. Daher kann man „Unendlichkeit“ auch so definieren:

Eine Menge M hat **unendlich viele** Elemente (ist unendlich), wenn es eine **echte Teilmenge** N von M und eine ein-eindeutige Zuordnung zwischen den beiden Mengen gibt.

In der Philosophie der Mathematik stellt man die Frage, wie uns eine unendliche Menge, z.B. die Menge der natürlichen Zahlen, gegeben ist, ob sie als fertig vorliegend zu denken ist (**aktual unendlich**) oder als immer größer werdender Bereich (**potentiell unendlich**).

Die aktuelle Auffassung sieht das Unendliche als fertig vorliegend und auch als etwas **wirklich Existierendes** an, mit dem man im Prinzip genauso umgehen kann wie mit dem Endlichen; das haben wir oben gemacht, indem wir das Prinzip der ein-eindeutigen Zuordnung zur Bestimmung der gleichen Anzahl auch auf die unendliche Menge der natürlichen Zahlen und ihre unendlichen Teilmengen angewandt haben. Die potentielle Auffassung sieht das Unendliche als **Prozess**, z.B. im Sinne des Weiterzählenkönnens. Aus dieser Auffassung heraus hat sich die Schreibweise $\rightarrow\infty$ für „geht gegen unendlich“ ergeben. In einer Schreibweise wie $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ vermischen sich beide Betrachtungsweisen: die Pünktchen suggerieren den Prozess, die geschweiften Klammern das fertige Ergebnis.

Gerade die Auffassung des Unendlichen als Prozess führt häufig zu Fehlvorstellungen, wenn es darum geht, „das unendlich Große“ oder „das unendlich Kleine“ berechenbar zu machen. „Das unendlich Große“ oder „das unendlich Kleine“ berechenbar zu machen, ist ein Hauptanliegen der Analysis.

Ein paar Symbole:

\mathbb{N} = Menge der natürlichen Zahlen (beginnend mit 1),

\mathbb{N}_0 = Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null

\mathbb{Z} = Menge der ganzen Zahlen

\mathbb{Q} = Menge der rationalen Zahlen

\mathbb{R} = Menge der reellen Zahlen

1.2. Folgen

Eine (unendliche) **Folge** ist ein **nicht-abbrechender Aufzählprozess** („potentiell unendlich“) bzw. eine (unendliche) **Liste** („aktual unendlich“), wobei ein Element mehrfach in diesem Prozess erfasst werden kann bzw. in dieser Liste vorkommen kann. Der trivialste Fall ist die konstante Folge, in der dasselbe Element und nur es immer wiederholt wird.

In dem Wort „Folge“ schwingt die „Prozess-Sicht“, das potentiell Unendliche, stärker mit. Gemeint ist allerdings der Prozess als fertig vorliegendes Ganzes, das aktual Unendliche.

Je nach dem, was aufgezählt wird, unterscheidet man:

Zahlenfolgen: Folgen von natürlichen, rationalen, reellen ... Zahlen; in der Hauptsache werden wir Folgen reeller Zahlen betrachten.

Punktfolgen: Folgen von Punkten auf der Zahlengeraden, in der Ebene, Gekoppelt mit den reellen Zahlen stehen Folgen von Punkten auf der Zahlengeraden im Vordergrund.

Intervallfolgen: Als spezielle Intervallfolgen werden wir Intervallschachtelungen betrachten.

Funktionsfolgen: z.B. Folgen von Polynomfunktionen.

Ist M die Menge (von Zahlen, Punkten, Intervallen, Funktionen), aus der solch eine Liste erstellt wird, dann kann man eine M-Folge formal als eine Abbildung (Funktion) betrachten, die jede natürliche Zahl einem Element der Menge M zuordnet. (Beachte: Es können verschiedene natürliche Zahlen auf dasselbe Element in M abgebildet werden.) Diese „Funktionsicht“ ist nur bedingt hilfreich; denn bei einer Funktion muss man i.a. die Definitionsmenge nicht in einer bestimmten Reihenfolge durchlaufen. Es ist aber gerade ein Charakteristikum der Folge, dass die Reihenfolge der Funktionswerte eine Rolle spielt, wie man es sich bei einer „Liste“ vorstellt.

In der „Funktionsicht“ würde man für einen Funktionswert $a(n)$ (lies: „a von n“) schreiben, wobei a der Eigenname für die Funktion und n die Variable für eine natürliche Zahl ist. Stattdessen ist es üblich a_n (lies: „a n“) zu schreiben; n heißt **Folgenindex** und a_n heißt das **n-te Folgenglied**. Die **Folge** als Ganzes (aktuell unendliche Sicht!) wird durch $\langle a_n \rangle$ symbolisiert.

Unterscheide Menge und Folge, z.B.

Menge der geraden Zahlen = $\{a \mid a \text{ ist ein Vielfaches von } 2\}$; 6 ist Element dieser Menge.

Folge der geraden Zahlen = $\langle a_n \mid a_n = 2n \rangle$; 6 ist drittes Folgenglied.

Speziell bei Zahlenfolgen gibt es drei verschiedene Möglichkeiten sie zu beschreiben.

„Punktchen“-Notierung Anfangsglieder mit suggerierter Regel (problematisch)	rekursiv Startglied(er), dann das Wie des Weiterzählens	explizit direkte Berechnung des n-ten Folgenglieds
2, 4, 6, 8, ...	$a_1 = 2$, dann immer 2 mehr $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$	$a_n = 2n$
1, 2, 6, 24, 120, ...	$a_1 = 1, a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$	$a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$
2, 1, 4, 3, 6, 5, ...	$a_1 = 2$, dann abwechselnd immer -1 und +3 $a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 1 + 2 \cdot (-1)^n$	$a_n = \begin{cases} n + 1, & n \text{ ungerade} \\ n - 1, & n \text{ gerade} \end{cases}$ oder $a_n = n - (-1)^n$
2, 4, 8, 16, ...	$a_1 = 2$, dann immer mal 2 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$	$a_n = 2^n$ berechne a_1 bis a_7
2, 4, 8, 16, ...	?	$a_n = 1 + \frac{(n+1)n}{2} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24}$ berechne a_1 bis a_7
2, 4, 8, 16, ...	?	$a_n = \frac{1}{3}n^3 - n^2 + \frac{8}{3}n$ berechne a_1 bis a_7
2, 4, 8, 16, ...	$a_1 = 2, a_2 = 4,$ $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n + 2n$ berechne a_1 bis a_7	?
1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$?
0, 1, 0, 1, ...	$a_1 = 0, a_{n+1} = 1 - a_n$	$a_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$

1.3. Maßzahlen – natürliche Zahlen, Brüche, reelle Zahlen

Gleichartige Größen (Länge, Fläche, Gewicht, Zeit, ...) messen heißt sie vergleichen:

e heißt ein Maß für eine Größe a , wenn ein Vielfaches von e dasselbe ergibt wie a , kurz:
wenn $a = m \cdot e$.

Zwei Größen a und b haben ein gemeinsames Maß e , wenn es natürliche Zahlen m und n gibt, so dass $a = m \cdot e$ und $b = n \cdot e$ gilt. Die beiden Größen verhalten sich wie m zu n und es gilt $a = \frac{m}{n} \cdot b$.

Die Pythagoreer waren überzeugt: Gleichartige Größen haben immer ein gemeinsames Maß. „Alles ist (natürliche) Zahl.“ Doch sie erlebten einen Schock: Die Diagonale und die Seite eines regelmäßigen Fünfecks können kein gemeinsames Maß haben, sie sind inkommensurabel.

Die Überlegungen, die die Pythagoreer zu dieser Einsicht führten, waren relativ einfach. Sie zeichneten in ein regelmäßiges Fünfeck alle Diagonalen ein. Dadurch entstand eine Gesamtfigur mit mehreren Sorten gleichlanger Strecken und in der Mitte ein kleineres regelmäßiges Fünfeck, in das sie noch eine Diagonale einzeichneten (deren Länge gab es schon in der Figur).

Nun wendeten sie eine einfache Eigenschaft eines gemeinsamen Maßes an: wenn zwei Größen a und b ein gemeinsames Maß e haben, dann ist e auch ein Maß für die Differenz der beiden Größen. Indem sie von der längeren Strecke immer die kürzere abzogen („Wechselwegnahme“), zeigten sie schließlich: wenn es ein gemeinsames Maß e für die Diagonale und die Seite des Ausgangsfünfecks gibt, dann ist e auch gemeinsames Maß für die Diagonale und die Seite des kleinen Fünfecks im Innern.

Dann könnte man den Prozess aber fortsetzen und ein noch kleineres Fünfeck und ein noch kleineres Fünfeck usw. einzeichnen und jedesmal müsste das Maß e gemeinsames Maß der jeweiligen Diagonale und Seite der immer kleiner werdenden Fünfecke im Innern sein.

Ein solches Maß e kann es nicht geben, denn die Annahme, es gäbe eins, führt zum Widerspruch: man würde den Prozess solange fortsetzen, bis die Seite des letzten Fünfecks kleiner wäre als das Maß e und folglich nicht e als Maß haben kann.

In Zahlen ausgedrückt bedeutet die Erkenntnis der Pythagoreer: Das Verhältnis von Diagonale und Seite eines regelmäßigen Fünfecks lässt sich nicht als Verhältnis natürlicher Zahlen, also nicht als Bruch darstellen. Gleiches gilt auch für das Verhältnis von Diagonale und Seite des Quadrats; d.h. wenn die Seite des Quadrats 1 cm beträgt, dann lässt sich die Maßzahl x für die Diagonale nicht als Bruch schreiben. Nun gilt nach Pythagoras, dass $x^2 = 2$ ist. Also kann die Zahl x , die wir symbolisch auch mit $\sqrt{2}$ bezeichnen, kein Bruch sein.

Fazit: Zum exakten Messen braucht man mehr als die rationalen Zahlen. Will man Maßzahlen exakt beschreiben, braucht man zusätzlich noch die irrationalen Zahlen, die zusammen mit den rationalen Zahlen die reellen Zahlen bilden.

1.4. Zahlengerade und Intervallschachtelung – Dezimalbrüche

Zahlen werden auf der Zahlengeraden veranschaulicht. Das fängt mit dem Zahlenstrahl an, an dessen Anfang die Null steht und auf dem eine Einheit wiederholt abgetragen wird: die so entstehende Skala repräsentiert die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null, und zwar in zweifacher Hinsicht: ein Skalenstrich steht sowohl für die Länge der Strecke vom Anfang bis zu dem Strich wie für den Punkt, der das Ende dieser Strecke markiert.

Der Zahlenstrahl wird unter zwei Gesichtspunkten erweitert. Zum einen werden die markierten Strecken in 2, 3, 4, ... (endlich viele) gleich lange Teile geteilt: so entstehen z.T. neue Strecken bzw. Punkte, die die Brüche repräsentieren; zu einem solchen Punkt gehören (unendlich) viele (gleichwertige) Brüche: fasst man alle gleichwertigen Brüche zu einer Bruchzahl zusammen, gehört zu jedem der neuen Punkte nur eine Bruchzahl. Diese neuen Punkte liegen dicht auf dem Zahlenstrahl; das soll heißen: zwischen zwei Punkten (= Bruchzahlen) gibt es mindestens einen weiteren Punkt

(= Bruchzahl) (in Wirklichkeit unendlich viele weitere neue Punkte). Dennoch haben wir gesehen: es gibt noch Strecken, die nicht durch diese neuen Zahlen repräsentiert werden (z.B. die Diagonale im Einheitsquadrat). Um allen Strecken bzw. Punkten auf dem Zahlenstrahl eine Zahl zuzuordnen, braucht man weitere Zahlen (davon gleich mehr).

Der zweite Gesichtspunkt der Erweiterung des Zahlenstrahls betrifft die Richtung: Durch Abtragen der Einheit und schließlich auch der anderen Strecken des Zahlenstrahls in die Gegenrichtung werden die ganzen Zahlen und schließlich die rationalen und reellen Zahlen als Punkte auf der Zahlengeraden repräsentiert.

Um eine überall dichte Punktmenge auf dem Zahlenstrahl bzw. auf der Zahlengeraden zu erhalten, braucht man gar nicht alle Bruchzahlen bzw. rationalen Zahlen. Es reichen die Zahlen (bzw. Punkte), die durch Teilung jeder Einheitsstrecke in 10, 100, 1000, ... gleich lange Teile entstehen. Die Skalenstriche können durch Dezimalbrüche beschrieben werden.

Alle (endlichen) Dezimalbrüche können in gewöhnliche Brüche verwandelt werden: Der Nenner besteht nur aus Zweier- und Fünferpotenzen: Umgekehrt gilt: Jeder gewöhnliche Bruch, dessen Nenner nur aus Zweier- und Fünferpotenzen besteht, kann in einen endlichen Dezimalbruch verwandelt werden. Ein Bruch, dessen Nenner außer 2 und 5 noch andere Primfaktoren besitzt, kann nicht als endlicher Dezimalbruch geschrieben werden.

Fazit: Bei der fortgesetzten Unterteilung der Einheitsstrecken durch Zehntelung entsteht kein Teilpunkt, der beispielsweise der Zahl $\frac{1}{3}$ oder der Zahl $\sqrt{2}$ entspricht.

Andererseits entstehen immer kleinere Intervalle, deren Intervallgrenzen endliche Dezimalbrüche sind („Dezimalintervalle“) und in denen beispielsweise die Zahl $\frac{1}{3}$ bzw. die Zahl $\sqrt{2}$ liegt. Diesen unendlichen Annäherungsprozess nennt man **Intervallschachtelung**, hier speziell mit Dezimalintervallen. Wir haben also einerseits eine wohldefinierte Zahl bzw. einen wohldefinierten Punkt auf der Zahlengeraden, z.B. $\sqrt{2}$, andererseits eine unendliche Intervallfolge, die offensichtlich zu diesem Punkt gehört. Was heißt „offensichtlich zu diesem Punkt gehört“? Was charakterisiert die Intervallfolge?

1. Sie beginnt mit dem abgeschlossenen Einheitsintervall, in dem $\sqrt{2}$ liegt.
2. Jedes weitere Folgenglied ist ein abgeschlossenes Teilintervall des vorherigen Folgenglieds, das durch Zehntelung entsteht.
3. Der Punkt $\sqrt{2}$ liegt in allen Folgengliedern.

3. sagt, welches der Teilintervalle, die in 2. durch Zehntelung entstehen, wir auswählen müssen. Wir wissen, dass in jedem Folgenglied (=Dezimalintervall) unendlich viele Punkte liegen. Solange wir nur eine endliche Liste von Intervallen betrachten, „gehören“ dazu noch unendlich viele Punkte, die in allen Intervallen der Liste enthalten sind. Durch Widerspruchsbeweis kann man

zeigen, dass die (aktuell) unendliche Liste (= Folge) zu keinem anderen Punkt (= Zahl) als $\sqrt{2}$ gehört, d.h. dass es außer $\sqrt{2}$ keine weitere Zahl x gibt, die in allen Folgengliedern liegt.

Fazit: Die (unendliche) Folge als Ganzes („aktuell unendliche Sicht“) charakterisiert die Zahl $\sqrt{2}$.

Zurück zu den Dezimalbrüchen: Die Intervallgrenzen der Folgenglieder werden durch Dezimalbrüche beschrieben, und zwar so, dass von Folgenglied zu Folgenglied eine weitere Dezimalstelle hinzu kommt. Nimmt man nur die linken Intervallgrenzen, so erhält man eine **Zahlenfolge** aus endlichen Dezimalbrüchen, für die gilt:

1. Sie beginnt mit einer ganzen Zahl.
2. Jedes weitere Folgenglied hat dieselbe Ziffernfolge wie das vorherige und eine Nachkommastelle mehr.

Auf diese Weise „entsteht“ („potenziell unendliche Redeweise“) ein unendlicher Dezimalbruch. Erst der (unendliche) Dezimalbruch als Ganzes („aktuell unendliche Sicht“) charakterisiert die Zahl.

Niemand kann einen unendlichen Dezimalbruch aufschreiben. Manchmal kann man aber die Gesetzmäßigkeit beschreiben, nach der die weiteren Nachkommastellen hinzugefügt werden müssen, genauer beschreiben: Beispiele: 0,3333.... 0,3030030003...

Jeder gewöhnliche Bruch, dessen Nenner nur aus Zweier- und Fünferpotenzen besteht, kann in einen endlichen Dezimalbruch verwandelt werden. Ist der Nenner eines Bruchs außer durch 2 und durch 5 noch durch andere Primzahlen teilbar, dann ist der zugehörige Dezimalbruch unendlich, aber von besonderer Gestalt: Er besitzt eine **Periode**, d.h. eine Ziffernfolge, die sich ständig wiederholt.

Dies sieht man besonders leicht ein, wenn man die Dezimalbruchentwicklung eines Bruchs $\frac{a}{b}$ dadurch herstellt, dass man das „Ergebnis der Divisions-Aufgabe“ $a : b$ mit Hilfe des bekannten schriftlichen Divisionsverfahrens ermittelt. Das Divisionsverfahren bricht ab, wenn bei einem Teilschritt sich bei der Division durch b der Rest 0 ergibt; wie gesagt, das geschieht nur wenn b außer 2 und 5 keine weiteren Primfaktoren besitzt. Bei der Division durch b gibt es $b - 1$ von Null verschiedene mögliche Reste; d.h. nach spätestens $b - 1$ Schritten muss sich ein bereits vorher aufgetretener Rest erneut ergeben und die Divisionsschritte müssen sich wiederholen. Mit etwas Aufwand kann man genau beschreiben, wie lang die Periode ist und ob es davor noch eine Ziffernfolge als Vor-Periode gibt.

Ein Dezimalbruch beschreibt genau dann eine rationale Zahl, wenn er endlich oder periodisch ist. Ein periodischer Dezimalbruch ist eine Beschreibung einer (aktuell) unendlichen Folge von endlichen Dezimalbrüchen, wobei das Bildungsgesetz der Folge in der Schreibweise zum Ausdruck kommt.

Wenn man die Dezimalbruchentwicklung eines gewöhnlichen Bruchs mit Hilfe des schriftlichen Divisionsverfahrens ermittelt, kann man niemals zu periodischen Dezimalbrüchen mit einer Neuner-Periode wie $0,\overline{9}$ oder $0,5\overline{39}$ kommen. Welche reellen Zahlen sind es dann? Denn wie gesagt: $0,\overline{9}$ und $0,5\overline{39}$ sind nichts anderes als die formale Darstellung zweier unendlicher Folgen, wobei die unendliche Folge genau einer Zahl bzw. genau einem Punkt auf der Zahlengeraden zugeordnet werden kann.

$0,\overline{9}$ steht für die Folge von linken Intervallgrenzen der Intervallfolge, die mit dem Einheitsintervall $[0,1]$ beginnt, deren rechte Intervallgrenzen die konstante Folge, bestehend aus der 1, bilden. Es gibt nur eine Zahl, die in all diesen Intervallen liegt: die Eins. Also ist $0,\overline{9}$ eine andere Schreibweise für 1, so wie $0,\overline{3}$ eine andere Schreibweise für $\frac{1}{3}$ ist.

$0,\overline{9} = 1$ und $0,5\overline{39} = 0,54$ bzw. $3 = 2,\overline{9}$ und $3,14 = 3,1\overline{39}$, das bedeutet: man kann jede ganze Zahl und jeden endlichen Dezimalbruch auch als unendlichen Dezimalbruch mit Neuner-Periode schreiben. In der Welt der periodischen Dezimalbrüche (wobei wir die Null nicht als Periode zulassen) herrscht dann wieder Eindeutigkeit: Jedem ist genau eine Zahl (Bruchzahl incl. der ganzen Zahlen) zugeordnet. In der Welt der Dezimalbrüche müssen wir dagegen mit einer eingeschränkten Eindeutigkeit leben: Für ganze Zahlen und Bruchzahlen aus der Familie der Zehnerbrüche gibt es zwei Darstellungen, eine endliche und eine mit Neuner-Periode. Beide Dezimalbrüche beschreiben dieselbe Dezimalzahl.

Der Dezimalbruch $0,3030030003\dots$ ist sicher nicht periodisch, stellt also keine rationale Zahl dar. Trotzdem erkennen wir das Bildungsgesetz und können sagen, ob auf der 100. oder der 1000. Stelle oder irgendeiner festen Stelle eine Drei oder eine Null steht. Auf der Zahlengeraden liegt der zugehörige Punkt zwischen 0,3 und 0,4, zwischen 0,30 und 0,31, zwischen 0,303 und 0,304, zwischen 0,3030 und 0,3031, usw.. Die ineinander geschachtelten Intervalle werden immer kleiner. Es gibt genau einen Punkt, der in allen diesen Intervallen liegt. Der Dezimalbruch $0,3030030003\dots$ stellt eine irrationale Zahl dar. **Irrationale Zahlen lassen sich nur durch unendliche Dezimalbrüche ohne Periode darstellen.**

Fazit: Die Dezimalzahlen mit endlicher und unendlicher Dezimalbruchentwicklung bilden einen größeren Zahlbereich als den der Bruchzahlen, den Zahlbereich der **reellen Zahlen**, bestehend aus den **rationalen** und den **irrationalen** Zahlen.

2. Konvergenz und Grenzwert

An zwei Stellen im 1. Kapitel (Fünfeck, Intervallschachtelung) wurde ein unendlicher Prozess nicht nur „im Großen“, sondern „im Kleinen“ durchgeführt. Nun sollen die Instrumente, mit denen man solche Prozesse beschreiben kann, geschärft werden: der Prozess soll berechenbar werden.

2.1. Nullfolgen - das ϵ -Spiel

Eine evidente Eigenschaft der Zahlengeraden bzw. der reellen Zahlen ist die sog. **Archimedische Eigenschaft**:

Für zwei beliebige Strecken a und b mit $a < b$ gilt: wenn man a oft genug (N -mal) hintereinanderlegt, erhält man eine größere Strecke als b .

Umformuliert: Zu zwei beliebigen positiven reellen Zahlen a und b mit $a < b$ gibt es immer eine natürliche Zahl N , so dass $N \cdot a > b$ ist.

Ist a speziell die Einheitsstrecke, $a = 1$, dann lautet die Aussage:

Zu jedem $b > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > b$.

In Worten: es gibt keine Schranke für die natürlichen Zahlen; die Folge der natürlichen Zahlen wächst unbeschränkt.

Wir bilden die Kehrwerte und nennen $\frac{1}{b} = \varepsilon$ (epsilon): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{N} < \varepsilon$.
 In Worten: Zu jeder (noch so kleinen) positiven reellen Zahl ε findet man immer noch einen
 Stammbruch $\frac{1}{N}$, der noch kleiner ist, und das gilt dann auch für alle Stammbrüche $\frac{1}{n}$ mit $n > N$.

Eine andere Deutung dieses Sachverhalts:

Sei $\langle a_n \rangle$ die (aktuell unendliche) Folge der Stammbrüche, d.h. $a_n = \frac{1}{n}$. Wir betrachten die positive
 reelle Zahl ε als Toleranzgrenze für die Abweichung von der Null. Dann lautet die obige Aussage:
 Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ kann man einen Folgenindex N angeben, so dass die Folgenglieder
 mit größerem Index als N innerhalb der Toleranzgrenze liegen.

Die Folge der Stammbrüche („aktuell unendlich“) ist das Paradigma für Folgen, deren Folgen-
 glieder sich mit wachsendem Folgenindex immer mehr der Null nähern („potentiell unendlich“).
 Man sagt auch: die **Folge strebt bzw. konvergiert gegen Null** bzw. hat den **Grenzwert Null** oder
 Kurz: sie ist eine **Nullfolge**.

Definition der Nullfolge (das ε -Spiel):

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ ist eine Nullfolge, wenn folgendes gilt:

Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ kann man einen Folgenindex N angeben, so dass

der Betrag der Folgenglieder mit größerem Index als N innerhalb der Toleranzgrenze liegt.

Kurz: zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N , so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n| < \varepsilon$.

Anschaulich auf der Zahlengeraden:

**wie klein man auch eine ε -Umgebung um den Nullpunkt wählt, es liegen noch immer fast alle
 Punkte der Folge darin, wobei „fast alle“ heißt „alle bis auf endlich viele“.**

Kurzschreibweisen für diesen Sachverhalt sind: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Weitere Nullfolgen sind: $\langle -\frac{1}{n} \rangle$; $\langle \frac{c}{n} \rangle$; $\langle \frac{c}{n^2} \rangle$ mit beliebiger, aber fester reeller Zahl c .

Nullfolge zu sein bedeutet nicht: „Die Folge nähert sich der Null, erreicht sie aber nie.“ Gegen-
 beispiel: $\langle \frac{1}{n} + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \rangle$

Nullfolge zu sein bedeutet nicht: „Die Folge nähert sich mit jedem Schritt immer mehr der Null.“

Gegenbeispiele: $\langle \frac{n^{10}}{10^n} \rangle$; $\langle \frac{10^n}{n!} \rangle$; $\langle \frac{1}{2n} + \frac{(-1)^n}{n} \rangle$

Ein Instrument zum Beweis, dass eine Folge gegen Null konvergiert, ist sie durch bekannte Null-
 folgen einzuschachteln; denn es gilt der

Einschachtelungssatz (für Nullfolgen):

**Sind $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ Nullfolgen und gilt für eine Folge $\langle x_n \rangle$ ab einem gewissen Index N für alle
 Folgenindizes n $a_n < x_n < b_n$, dann ist auch $\langle x_n \rangle$ eine Nullfolge.**

So beweist man: für jede feste natürliche Zahl k sind $\langle \frac{1}{n^2} \rangle$ und $\langle \frac{1}{n^k} \rangle$ Nullfolgen.

Weitere hilfreiche Instrumente zum Beweis der Konvergenz gegen Null sind die

Grenzwertsätze (für Nullfolgen):

- (i) **Ist $\langle a_n \rangle$ eine Nullfolge, dann ist auch die Folge $\langle c \cdot a_n \rangle$ mit beliebiger, aber fester reeller Zahl
 c eine Nullfolge.**
- (ii) **Sind $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ Nullfolgen, dann sind auch die Folgen $\langle a_n + b_n \rangle$, $\langle a_n - b_n \rangle$, $\langle a_n \cdot b_n \rangle$
 Nullfolgen.**

Eine besonders wichtige Folge ist die sogenannte **geometrische Folge** $\langle q^n \rangle$ mit beliebiger, aber fester reeller Zahl q . Die Fälle $q = 0$, $q = 1$ und $q = -1$ sind weniger interessant.

Satz über die geometrische Folge:

Die geometrische Folge $\langle q^n \rangle$ ist

(i) für $|q| > 1$ unbeschränkt,

(ii) für $|q| < 1$ eine Nullfolge.

2.2. Grenzwert versus Häufungspunkt

Den Zusammenhang zwischen der Zahl Null und den Nullfolgen können wir auf eine beliebige reelle Zahl a und zugehörige Folgen übertragen.

Definition des Grenzwerts einer Folge:

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ besitzt den Grenzwert a (man sagt auch: sie konvergiert gegen a),

wenn die Folge $\langle a_n - a \rangle$ eine Nullfolge ist; d.h. wenn folgendes gilt:

Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ kann man einen Folgenindex N angeben, so dass der Betrag von $|a_n - a|$ mit größerem Index als N innerhalb der Toleranzgrenze liegt.

Kurz:

Zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N , so dass für alle $n > N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$.

Anschaulich auf der Zahlengeraden:

wie klein man auch eine ε -Umgebung um den Punkt a wählt, es liegen noch immer fast alle Punkte der Folge darin, wobei „fast alle“ heißt „alle bis auf endlich viele“.

Kurzschreibweisen für diesen Sachverhalt sind: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$.

Definition der Konvergenz und Divergenz einer Folge:

Eine Folge heißt konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt, sonst heißt sie divergent.

Konvergenz ist eine Eigenschaft des als fertiges Ganzes vorliegenden Prozesses; der Grenzwert ist eine ganzbestimmte Zahl, die damit verbunden ist. Grenzwert und Konvergenz sind sozusagen zwei Seiten derselben Medaille: Grenzwert ohne Konvergenz gibt ebenso wenig wie Konvergenz ohne Grenzwert. Das ε -Spiel beschreibt die Identifikation von Grenzwert und konvergenter Folge durch eine neue Art von Gleichheit, anders als wir sie in der Algebra beim Lösen von Gleichungen gewohnt sind: Gleichheit bedeutet hier „innerhalb jeder gewünschten (Abweichungs-) Toleranzgrenze liegen“. Und das muss für alle bis auf endlich viele Folgenglieder gelten.

Zu einer Folge kann es nur einen Grenzwert geben; eine Zahl kann aber Grenzwert verschiedener Folgen sein.

Satz von der Eindeutigkeit des Grenzwerts:

Eine Folge kann höchstens einen Grenzwert besitzen.

Eine konvergente Folge zu sein bzw. Grenzwert einer Folge zu sein bedeutet nicht: „Die Folge nähert sich dem Grenzwert, erreicht ihn aber nie.“

Eine konvergente Folge zu sein bzw. Grenzwert einer Folge zu sein bedeutet nicht: „Die Folge nähert sich mit jedem Schritt immer mehr dem Grenzwert.“

Hilfreiche Instrumente zum Beweis der Konvergenz gegen den Grenzwert a sind

Einschachtelungssatz:

Konvergieren $\langle a_n \rangle$ und $\langle b_n \rangle$ gegen denselben Grenzwert a und gilt für eine Folge $\langle x_n \rangle$ ab

einem gewissen Index N für alle Folgenindizes n $a_n < x_n < b_n$, dann konvergiert auch $\langle x_n \rangle$ gegen a .

Grenzwertsätze

(i) Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen den Grenzwert a , dann konvergiert die Folge $\langle c \cdot a_n \rangle$ mit beliebiger, aber fester reeller Zahl c gegen den Grenzwert $c \cdot a$;

kurz: wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) = c \cdot a$

(ii) Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen den Grenzwert a und $\langle b_n \rangle$ gegen den Grenzwert b , dann konvergiert

• die Folge $\langle a_n + b_n \rangle$ gegen $a + b$, kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) + (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$,

• die Folge $\langle a_n - b_n \rangle$ gegen $a - b$, kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) - (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$,

• die Folge $\langle a_n \cdot b_n \rangle$ gegen $a \cdot b$; kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$.

(iii) Konvergiert $\langle a_n \rangle$ gegen den Grenzwert a und $\langle b_n \rangle$ mit $b_n \neq 0$ (für alle n) gegen den Grenzwert $b \neq 0$, dann konvergiert die Folge $\langle a_n : b_n \rangle$ gegen $a : b$;

kurz: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n : b_n) = (\lim_{n \rightarrow \infty} a_n) : (\lim_{n \rightarrow \infty} b_n)$

Es gilt der

Satz von der Beschränktheit konvergenter Folgen:

Eine konvergente Folge $\langle a_n \rangle$ ist beschränkt, d.h. es gibt eine reelle Zahl M , so dass für alle Folgenglieder gilt: $|a_n| < M$.

Eine Folge ist divergent, wenn sie unbeschränkt ist (Beispiel: $\langle 2^n \rangle$) oder wenn die Folgenglieder sich bei mehr als einem Punkt häufen (Beispiel: $\langle (-1)^n + \frac{1}{n} \rangle$).

Vergleiche die Definition des Grenzwerts mit der

Definition des Häufungspunkts:

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ besitzt den Häufungspunkt a , wenn folgendes gilt:

Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ gibt es unendlich viele Folgenindizes n , so dass der Betrag von $|a_n - a|$ innerhalb der Toleranzgrenze liegt.

Anschaulich auf der Zahlengeraden:

wie klein man auch eine ε -Umgebung um den Punkt a wählt, es liegen noch immer unendlich viele Punkte der Folge darin.

Ein Grenzwert ist immer ein Häufungspunkt. Die Umkehrung gilt nicht.

Eine Folge mit einem Häufungspunkt muss nicht beschränkt sein. Aber es gilt der:

Satz: Eine beschränkte Folge $\langle a_n \rangle$ besitzt immer einen Häufungspunkt.

Die Beweisidee ist einfach: Wenn $\langle a_n \rangle$ beschränkt ist, liegen alle Folgenglieder in einem Intervall $[a, b]$. Halbiere das Intervall: In mindestens einem der beiden (abgeschlossenen) Teilintervalle liegen unendlich viele Folgenglieder. Wähle dieses Teilintervall und halbiere es. In mindestens einem der neu entstandenen (abgeschlossenen) Teilintervalle liegen unendlich viele Folgenglieder. Wähle dieses ...

Das Ergebnis dieses Prozesses ist eine Intervallschachtelung: Es gibt genau einen Punkt a , der in allen Intervallen der Intervallfolge liegt. Dieser Punkt a ist Häufungspunkt der Folge $\langle a_n \rangle$; denn zu jeder Toleranzgrenze ε , d.h. in jeder ε -Umgebung von a , gibt es ein Teilintervall der Intervallfolge, das ganz in dieser ε -Umgebung liegt: In diesem Teilintervall liegen unendlich viele Folgenglieder a_n .

2.3. Besondere Folgen: geometrische Reihen und harmonische Reihe

Das **arithmetische Mittel** x zweier reeller Zahlen a und b ist die Zahl, die genau in der Mitte zwischen beiden liegt; d.h. es gilt $a + b = x + x$ bzw. $a - x = x - b$ bzw. $x = \frac{a+b}{2}$.

Um das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen a und b anschaulich zu erklären, stelle man sich die beiden Zahlen als Seitenlängen eines Rechtecks vor; die Seitenlänge x eines flächengleichen Quadrats liegt dann zwischen a und b ; für das **geometrische Mittel** gilt also: $x^2 = a \cdot b$ bzw. $x = \sqrt{a \cdot b}$ bzw. $a : x = x : b$.

Um das harmonische Mittel zweier positiver reeller Zahlen a und b anschaulich zu erklären, betrachten wir sie als Punkte auf der Zahlengeraden, die zugleich die Länge der Strecken vom Ursprung aus charakterisieren (wir denken uns $a < b$): eine Zahl x zwischen a und b teilt die Strecke von a bis b im Innern im Verhältnis $\frac{b-x}{x-a}$. Man spricht von einer harmonischen Teilung, wenn dieses Teilverhältnis gleich dem Verhältnis b zu a der beiden Strecken ist. Das harmonische Mittel ist also die Zahl, für die gilt: $\frac{b-x}{x-a} = \frac{b}{a}$ bzw. $x = \frac{2ab}{a+b}$.

Zwischen den drei Mittelwerten zweier positiver reeller Zahlen gilt folgender Zusammenhang:

Satz von den Mittelwerten:

- (i) **(arithmetisches Mittel) · (harmonisches Mittel) = (geometrisches Mittel)**
- (ii) **(harmonisches Mittel) ≤ (geometrisches Mittel) ≤ (arithmetisches Mittel)**
die Gleichheit gilt dann und nur dann, wenn die beiden gemittelten Zahlen gleich sind.

Definition

Eine Folge $\langle a_n \rangle$ heißt **arithmetische/ geometrische/ harmonische Folge**, wenn jedes Folgenglied außer dem ersten das arithmetische/ geometrische/ harmonische Mittel seiner benachbarten Folgenglieder ist.

Hieraus kann man sowohl eine rekursive wie eine explizite Beschreibung der Folgen herleiten:

Für eine arithmetische Folge $\langle a_n \rangle$ gilt:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1} = d \text{ (konstant) bzw. } a_{n+1} = a_n + d \text{ bzw. } a_{n+1} = a_1 + n \cdot d$$

Eine spezielle arithmetische Folge ist die Folge $\langle n \rangle$ der natürlichen Zahlen. Alle arithmetischen Folgen (außer der konstanten Folge) sind divergent.

Für eine geometrische Folge $\langle a_n \rangle$ gilt:

$$a_{n+1} : a_n = a_n : a_{n-1} = q \text{ (konstant) bzw. } a_{n+1} = q \cdot a_n \text{ bzw. } a_{n+1} = a_1 \cdot q^n$$

In Kap. 2.2 haben wir gezeigt: Eine geometrische Folge divergiert für $|q| > 1$ und ist eine Nullfolge für $|q| < 1$.

Für eine harmonische Folge $\langle a_n \rangle$ gilt, dass $\langle \frac{1}{a_n} \rangle$ eine arithmetische Folge ist. Eine spezielle harmonische Folge ist die Folge $\langle \frac{1}{n} \rangle$ der Stammbrüche, sie ist eine Nullfolge.

Aus einer Folge $\langle a_n \rangle$ kann man eine weitere Folge $\langle s_n \rangle$ konstruieren, indem man die einzelnen Folgenglieder sukzessive aufsummiert:

$$s_1 = a_1, s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \text{bzw.} \quad s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

Eine so konstruierte Folge heißt auch **Reihe**.

Arithmetische Reihen werden in der Arithmetik untersucht, sind aber, da sie divergieren, für die Analysis nicht von besonderem Interesse.

Anders ist es mit den geometrischen Reihen. Der Standardtyp dieser Reihen – wir werden ihn deshalb als **die geometrische Reihe** bezeichnen – ist die Reihe $\langle s_n \rangle$, definiert durch

$$s_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \sum_{k=0}^n q^k$$

Die geometrische Reihe ist die wichtigste Folge in der Analysis. Für $|q| \geq 1$ divergiert sie; aber für $|q| < 1$ konvergiert sie und man kann ihren Grenzwert leicht berechnen:

Satz vom Grenzwert der geometrischen Reihe:

Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$; in Symbolen:

$$1 + q + q^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$$

In Kap. 1.4. haben wir Dezimalbrüche behandelt. **Periodische Dezimalbrüche sind geometrische Reihen.**

Beispiele:

$$0, \bar{1} = \frac{1}{10} \cdot (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 + \dots) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{9}$$

$$0, \bar{9} = \frac{9}{10} \cdot (1 + \frac{1}{10} + (\frac{1}{10})^2 + (\frac{1}{10})^3 + \dots) = \frac{9}{10} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\frac{1}{10})^k = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Eine aus der geometrischen Reihe abgeleitete Reihe tritt in Anwendungen häufig auf.

Beispiel aus der Stochastik: Ein Würfel wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal eine Sechs erscheint. Wie viele Würfe benötigt man im Schnitt?

Eine theoretische Überlegung ergibt, dass für die durchschnittliche Anzahl von Würfeln der Wert E zu erwarten ist mit

$$E = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot (\frac{5}{6})^2 \cdot \frac{1}{6} + \dots = \frac{1}{6} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (\frac{5}{6})^{k-1}$$

Nun gilt: die **abgeleitete geometrische Reihe** konvergiert für $|q| < 1$ gegen den Grenzwert

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

Also ist $E = 6$.

Die geometrische Reihe ist nicht nur wegen ihres häufigen Vorkommens bei unendlichen Prozessen von Bedeutung. An ihr kann man auch die Grundvorstellungen über unendliche Prozesse schärfen und sich mit möglichen Fehlvorstellungen auseinandersetzen.

Für $0 < q < 1$ wachsen die Folgenglieder ständig, da ja immer noch etwas Positives dazu addiert wird. Was hinzu addiert wird, wird allerdings immer kleiner; d.h. der Abstand benachbarter Folgenglieder wird immer geringer, und zwar mit dem Faktor q . Tatsächlich bleiben alle Folgenglieder kleiner als $\frac{1}{1-q}$; aber für jede Zahl x , die (auch nur etwas) kleiner ist als $\frac{1}{1-q}$, liegen fast alle

(alle bis auf endlich viele) Folgenglieder zwischen x und $\frac{1}{1-q}$. (Was davon gilt auch für die abgeleitete geometrische Reihe?)

Welche dieser Eigenschaften charakterisiert die Konvergenz von Folgen? Dass der Abstand benachbarter Folgenglieder immer geringer wird, reicht nicht, damit eine Folge konvergent ist. Das paradigmatische Gegenbeispiel ist die Summe der Stammbrüche, **die harmonische Reihe** $\langle h_n \rangle$, definiert durch

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

Es gilt der

Satz: Die harmonische Reihe ist unbeschränkt, also divergent.

Kleine Änderung – große Wirkung: Wir „stutzen“ die harmonische Reihe, indem wir bei jedem Folgenglied solche Summanden (= Stammbrüche) weglassen, in denen die Ziffer 9 vorkommt. Es gilt der

Satz: Die gestutzte harmonische Reihe ist beschränkt.

Ist sie deshalb schon konvergent? Wir wissen: Nicht jede beschränkte Folge ist konvergent. Aber die Folgenglieder der gestutzten harmonischen Reihe wachsen ständig und sind beschränkt!?!

2.4. Konvergenzkriterien – Intervallschachtelung – Vollständigkeit

Die Folgenglieder der gestutzten harmonischen Reihe wachsen ständig und sind beschränkt. Ist die Reihe deshalb schon konvergent? Konvergenz heißt: Es gibt einen Grenzwert, mit dem wir das ε -Spiel durchführen können. Wir haben keine Chance, eine konkrete Zahl zu benennen, mit der wir dieses tun können. Was wir brauchen, sind Konvergenzkriterien, die ohne die explizite Kenntnis des Grenzwerts auskommen, aber die Existenz eines Grenzwerts zweifelsfrei sicherstellen.

Definition von monotonen Folgen:

Eine Folge $\langle c_n \rangle$ heißt **monoton wachsend bzw. monoton fallend**, wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $c_{n+1} \geq c_n$ bzw. $c_{n+1} \leq c_n$.

Die Folge heißt **streng monoton steigend bzw. fallend**, wenn $c_{n+1} > c_n$ bzw. $c_{n+1} < c_n$ gilt.

Satz (Monotoniekriterium):

Eine **monoton wachsende bzw. fallende Folge** $\langle c_n \rangle$, die **nach oben bzw. nach unten beschränkt ist**, **konvergiert**.

Ausführlicher für den Fall der monoton wachsenden Folge:

Voraussetzung: (i) $c_{n+1} \geq c_n$ für alle n ; (ii) es gibt eine Schranke M , so dass $c_n \leq M$ für alle n gilt.

Behauptung: Es gibt eine Zahl c mit der Eigenschaft: zu jeder reellen Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N , so dass für alle $n > N$ gilt: $|c_n - c| < \varepsilon$.

Beweis:

Wegen Voraussetzung (i) ist c_1 eine untere Schranke der Folge; nenne sie a_1 . Wegen (ii) besitzt $\langle c_n \rangle$ eine obere Schranke, nenne sie b_1 . Demnach liegen alle Folgenglieder im Intervall $[a_1|b_1]$.

Halbiere das Intervall $[a_1|b_1]$.

Entweder:	die Mitte ist obere Schranke der Folge $\langle c_n \rangle$.	Dann liegen alle Folgenglieder in der linken Intervallhälfte. Wähle die linke Hälfte als nächstes Intervall $[a_2 b_2]$.
Oder:	mindestens ein Folgenglied liegt rechts von der Mitte.	Dann liegen alle nachfolgenden (also unendlich viele) Folgenglieder in der rechten Intervallhälfte. Wähle die rechte Hälfte als nächstes Intervall $[a_2 b_2]$.

Halbiere das Intervall $[a_2|b_2]$.

Entweder:	die Mitte ist obere Schranke der Folge $\langle c_n \rangle$.	Dann liegen alle Folgenglieder, die im Intervall $[a_2 b_2]$ liegen, in der linken Intervallhälfte. Wähle die linke Hälfte als nächstes Intervall $[a_3 b_3]$.
Oder:	mindestens ein Folgenglied liegt rechts von der Mitte.	Dann liegen alle nachfolgenden (also unendlich viele) Folgenglieder in der rechten Intervallhälfte. Wähle die rechte Hälfte als nächstes Intervall $[a_3 b_3]$.

Halbiere das Intervall $[a_3|b_3]$. Usw.

Fazit: Es gibt eine Folge $\langle [a_n|b_n] \rangle$ von ineinander geschachtelten abgeschlossenen Intervallen, deren Länge gegen Null geht und in denen jeweils unendlich viele Folgenglieder liegen.

Intervallschachtelungsaxiom:

Zu jeder Folge $\langle [a_n|b_n] \rangle$ von ineinander geschachtelten abgeschlossenen Intervallen, deren Länge gegen Null geht, gibt es eine reelle Zahl c , die in allen Intervallen liegt.

Abschluss des Beweises: Diese Zahl c ist der Grenzwert der Folge $\langle c_n \rangle$. Denn (ε -Spiel):

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall $[a_k|b_k]$, dessen Länge kleiner als ε ist; d.h. für alle Zahlen x und y in diesem Intervall gilt $|x - y| < \varepsilon$. Sei c_N irgendein Folgenglied in diesem Intervall. Dann liegen wegen der Monotonie alle Folgenglieder c_n mit $n > N$ im Intervall $[a_k|b_k]$; d.h., es gilt für alle $n > N$ die Ungleichung $|c_n - c| < \varepsilon$.

Mit Hilfe des Monotoniekriteriums kann man beweisen:

Die Reihe $\langle a_n \rangle$ mit $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt ($a_n < 3$), also konvergiert sie. Ihr Grenzwert ist die Eulersche Zahl $e = 2,718\dots$, eine irrationale Zahl.

Die Folge $\langle \sqrt[n]{n} \rangle$ ist monoton fallend und durch 1 nach unten beschränkt, also konvergiert sie. Man kann zeigen: ihr Grenzwert ist 1.

Rückblick: Wir haben das **Intervallschachtelungsaxiom** benutzt, um die **Existenz eines Grenzwerts** sicher zu stellen; denn das war die Bedingung für den Nachweis der Konvergenz.

Anmerkungen zum Intervallschachtelungsaxiom:

- Man spricht von einem **Axiom**, wenn man die Aussage nicht beweisen will, sondern zugrunde legt.
- Das Axiom sichert zunächst nur die **Existenz** eines Wertes in allen Intervallen. Die **Eindeutigkeit** dieses Wertes zeigt man, indem man die Annahme, dass es zwei verschiedene Werte gebe, zum Widerspruch führt.
- Die Voraussetzung, dass die **Intervalle abgeschlossen** sind, ist notwendig für die Aussage, wie man durch Gegenbeispiele belegen kann.

- Auch wenn der Prozess unendlich ist: Die Zahl, die in allen Intervallen liegt, kann **rational oder irrational** sein.

Neben der Intervallschachtelung durch Dezimalintervalle (vgl. Kap. 1.4.) ist das **Heron-Verfahren** zur Berechnung einer Quadrat-Wurzel ein Paradigma für eine Intervallschachtelung. (Heron von Alexandria lebte zwischen 200 und 100 v.Chr..)

Berechnung von \sqrt{c} nach Heron:

- Starte mit einem Rechteck mit den Seiten a_1 und b_1 , wobei $a_1 < b_1$ und $a_1 \cdot b_1 = c$ ist.
- Idee: Bestimme mit jedem Schritt ein neues Rechteck, das flächengleich zum vorherigen ist, sich aber immer mehr der Form eines Quadrats nähert.
- Umsetzung: Die größere Seite b_{n+1} des neuen Rechtecks ist das arithmetische Mittel aus den Seitenlängen des vorherigen Rechtecks, also $b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$. Die kleinere Seite a_{n+1} bestimme so, dass der Flächeninhalt erhalten bleibt, also $a_{n+1} \cdot b_{n+1} = a_n \cdot b_n$ bzw. $a_{n+1} = \frac{2 \cdot a_n \cdot b_n}{a_n + b_n}$; d.h. a_{n+1} ist das harmonische Mittel aus den Seitenlängen des vorherigen Rechtecks. Aus dem Satz von den Mittelwerten folgt dann $a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$; d.h. die abgeschlossenen Intervalle $[a_n | b_n]$ sind ineinander geschachtelt.
Die Folge $\langle \Delta_n \rangle$ der Intervalllängen ($\Delta_n = b_n - a_n$) ist eine Nullfolge. Die „Güte“ der Konvergenz wird durch folgende Abschätzung beschrieben: $\Delta_{n+1} < \frac{1}{4\sqrt{c}} \cdot \Delta_n^2$; man spricht auch von quadratischer Konvergenz.

Beachte: Wenn man mit rationalen Werten startet, bleiben die Intervallgrenzen im ganzen Verfahren rational, gleich ob das Verfahren einen rationalen oder einen irrationalen Grenzwert besitzt.

Bei der harmonischen Reihe und auch bei der Folge $\langle \sqrt{n} \rangle$ wird der Abstand benachbarter Folgenglieder immer kleiner; trotzdem divergieren beide Folgen. Aber es gibt ein etwas schärferes Kriterium, das die Konvergenz sicher stellt, ohne dass die Folge monoton wachsend oder fallend und beschränkt sein muss. Es ist nach dem Mathematiker Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) benannt.

Satz (Cauchy-Kriterium):

Eine Folge $\langle a_n \rangle$, die das Cauchy-Kriterium erfüllt, konvergiert. Das Cauchy-Kriterium lautet: Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ gibt es einen Folgenindex N , so dass zwei beliebige Folgenglieder mit einem größeren Index als N einen kleineren Abstand als ε haben.

Kurz: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N , so dass für alle $m, n > N$ gilt: $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

Beweis durch „Konstruktion“ des Grenzwerts mit Intervallschachtelung:

(i) Grobe Lage des Grenzwerts: Festlegung des Startintervalls.

Zu $\varepsilon = 1$ gibt es nach Voraussetzung eine natürliche Zahl N , so dass für alle $m, n > N$ gilt:

$|a_m - a_n| < 1$, also $|a_{N+1} - a_n| < 1$ für alle $n > N$;

d.h. alle Folgenglieder ab dem Index $N+1$ liegen im Intervall $[a_{N+1} - 1 | a_{N+1} + 1]$ und außerhalb dieses Intervalls liegen nur endlich viele Folgenglieder.

(ii) Halbierungsverfahren: Konstruktion eines Häufungspunkts

Halbiere das Intervall $[a_{N+1} - 1 | a_{N+1} + 1]$: In mindestens einem der beiden (abgeschlossenen) Teilintervalle liegen unendlich viele Folgenglieder. Wähle ein solches.

Halbiere es: In mindestens einem ... usw.

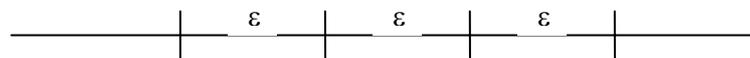
Ergebnis: Eine Intervallschachtelung aus abgeschlossenen Intervallen, deren Länge gegen Null geht und in denen jeweils unendlich viele Folgenglieder liegen.

Nach dem Intervallschachtelungsaxiom gibt es eine reelle Zahl a , die in allen Intervallen liegt. Diese Zahl a ist Häufungspunkt der Folge $\langle a_n \rangle$. Denn: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein Intervall, dessen Länge kleiner als ε ist; d.h. für alle Folgenglieder a_n in diesem Intervall (das sind unendlich viele) gilt $|a_n - c| < \varepsilon$.

Problem: Die Willkürlichkeit bei der Auswahl der Teilintervalle: Kann es mehr als einen Häufungspunkt der Folge $\langle a_n \rangle$ geben?

(iii) Eindeutigkeit des Häufungspunkts

Eine Folge, die das Cauchy-Kriterium erfüllt, kann nur einen Häufungspunkt besitzen. Angenommen, es gäbe außer dem Häufungspunkt a noch einen Häufungspunkt b . Dann wähle ε als ein Drittel des Abstands von a und b , also $\varepsilon = \frac{1}{3}|a - b|$; d.h. die Intervalle $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ und $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ liegen um den Wert ε auseinander.



Da a und b Häufungspunkt sind, liegen in beiden Intervallen jeweils unendlich viele Folgenglieder der Folge $\langle a_n \rangle$. Der Abstand der Folgenglieder aus dem Intervall $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ zu den Folgengliedern aus dem Intervall $[b - \varepsilon, b + \varepsilon]$ beträgt also mindestens ε ; d.h. zu diesem ε gibt es keinen Folgenindex N , so dass alle Folgenglieder mit einem größeren Index als N einen kleineren Abstand als ε haben – im Widerspruch zu der Voraussetzung, dass die Folge $\langle a_n \rangle$ das Cauchy-Kriterium erfüllt.

Das Intervallschachtelungsaxiom, das Monotoniekriterium und das Cauchy-Kriterium haben eine gemeinsame Struktur: sie beschreiben einen **unendlichen Prozess** („potentiell unendlich“), eine Intervallfolge bzw. eine Zahlenfolge und ordnen diesem Prozess als Ganzes („aktuell unendlich“) einen Wert, eine Zahl zu, den **Grenzwert**. Die Aussagen des Intervallschachtelungsaxioms, des Monotoniekriteriums und des Cauchy-Kriteriums gelten für reelle Zahlen, nicht aber für rationale Zahlen (Gegenbeispiele!); sie kennzeichnen das „Mehr“ an Eigenschaften, das die reellen Zahlen gegenüber den rationalen Zahlen besitzen. Dieses „Mehr“ bezeichnet man als die **Vollständigkeit**. Vollständigkeit ist in dem Sinne gemeint, dass einem unendlichen Prozess in einer Menge im Sinne eines Abschlusses auch ein Element dieser Menge zugeordnet werden kann.

Wir werden die Vollständigkeit der reellen Zahlen im Folgenden noch mehrfach benutzen. In der Tat gilt, dass alle wichtigen Sätze der Analysis die Vollständigkeit voraussetzen, also in der Menge der rationalen Zahlen falsch sind.

3. Flächen- und Rauminhalt

3.1. Flächenbestimmung in der Antike

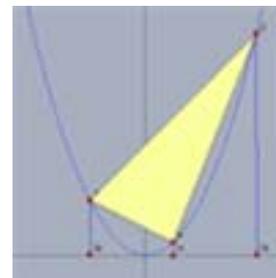
Schon in der Antike bemühte man sich darum, den Flächeninhalt krummlinig begrenzter Figuren zu bestimmen. Da das Zahlssystem im heutigen Sinne (natürliche, ganze, rationale, reelle Zahlen und deren Darstellung im Dezimalsystem) noch nicht bekannt war, wurde die Flächenbestimmung geometrisch gedeutet: es ging um die zeichnerische Umwandlung einer krummlinig

begrenzten ebenen Fläche in ein flächengleiches Quadrat. Man sprach auch von der **Quadratur** der Fläche. Ob eine solche zeichnerische Umwandlung gelingt, hängt von den Instrumenten ab, die man benutzt. Die Griechen stellten sich vor allem die Frage, ob eine solche Quadratur nur mit Zirkel und Lineal (wohlgemerkt: nicht Geodreieck) in endlich vielen Konstruktionsschritten möglich sei. So entstand das berühmte Problem der **Quadratur des Kreises**, der Verwandlung des Kreises in ein flächengleiches Quadrat nur mit Zirkel und Lineal. Erst im 19. Jahrhundert und mit Mitteln der Algebra wurde gezeigt, dass das Problem prinzipiell unlösbar ist.

Zunächst sah es jedoch ganz hoffnungsvoll aus. Hippokrates von Chios (um 450 v. Chr.) wird eine Konstruktion zugeschrieben, die man die **Möndchen des Hippokrates** nennt: Zeichne oberhalb der Hypotenuse und der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks je einen Halbkreis; dadurch entstehen zwei Möndchen, deren Ränder jeweils Kreisbögen sind. Mit Hilfe des Satzes von Pythagoras kann man zeigen: Die Fläche der beiden Möndchen zusammen ist so groß wie die Fläche des rechtwinkligen Dreiecks. (Da die Griechen ein rechtwinkliges Dreieck ohne Schwierigkeit in ein flächengleiches Quadrat verwandeln konnten, war damit die Quadratur der Möndchenfläche erledigt.)

Archimedes (287? – 212 v. Chr.) verließ die Beschränkungen „nur mit Zirkel und Lineal“ und „in endlich vielen Konstruktionsschritten“. Eine seiner wichtigsten Methoden war die **Exhaustionsmethode**: Er schöpfte die Figur durch (wenn nötig unendlich viele) Teilflächen aus, deren Inhalt er relativ leicht berechnen konnte. So machte er es mit dem Kreis, den er, beginnend mit dem einbeschriebenen regelmäßigen Sechseck, durch regelmäßige Vielecke ausschöpfte, indem er immer wieder auf die Seiten des vorherigen Vielecks gleichschenklige Dreiecke aufsetzte. Durch Vergleich mit dem Radiusquadrat erhielt er so einen immer besseren Näherungswert für die Verhältniszahl π .

Ein weiteres Beispiel ist der **Flächeninhalt des Parabel-Segments**. Archimedes benutzte nur geometrische Eigenschaften der Parabel, um die Flächen der ausschöpfenden Dreiecke zu berechnen. Wir nehmen eine Errungenschaft zu Hilfe, die erst im 16. Jahrhundert durch René Descartes begann, die Beschreibung von Figuren in der Ebene durch Koordinaten und Funktionsgleichungen. Die zentrale Idee der Ausschöpfung ist jedoch dieselbe.



Wir betrachten die Parabel $y = c \cdot x^2$. Ein Parabel-Segment ist die Fläche zwischen einer Geraden, die die Parabel in den Punkten P und Q schneidet, und der Parabel. Unter der Breite d des Parabel-Segments verstehen wir den Abstand der x -Koordinaten der beiden Punkte. Hat also P die Koordinaten $(x \mid c \cdot x^2)$, dann hat Q die Koordinaten $(x+d \mid c \cdot (x+d)^2)$.

Zentrale Idee: Betrachte den Punkt R, dessen x -Koordinate in der Mitte zwischen den x -Koordinaten von P und Q liegt¹. Dann hat R also die Koordinaten $(x + \frac{d}{2} \mid c \cdot (x + \frac{d}{2})^2)$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks PQR hängt nur von der Breite d des Parabel-Segments und nicht von der Lage der Punkte P und Q auf der Parabel ab:

$$A_{\Delta PQR} = \frac{1}{8} c \cdot d^3.$$

¹ Archimedes bestimmte den Punkt R so: Nimm den Punkt R auf der Parabel, wo die Tangente die gleiche Richtung hat wie die Sekante PQ. Diesen Punkt kann man mit den definierenden geometrischen Eigenschaften der Parabel bestimmen.

Exhaustion: Betrachte die beiden Parabel-Segmente zwischen den Sekanten PR und RQ und der Parabel. Sie haben die halbe Breite des ursprünglichen Segments. Wenn man in jedes dieser Segmente wieder jeweils in Dreieck wie oben einfügt, dann hat jedes dieser Dreiecke ein Achtel der Fläche des Dreiecks PQR, beide zusammen haben also ein Viertel der Fläche des Dreiecks PQR.

Im nächsten Schritt gibt es nun schon vier Parabel-Segmente, wieder mit der Hälfte der vorherigen Breite. Die vier eingefügten Dreiecke zusammen haben ein Viertel des Flächeninhalts der vorherigen beiden Dreiecke zusammen.

Und so geht es weiter: Man fügt immer doppelt so viele Dreiecke wie im Schritt vorher ein. Der Flächeninhalt dieser Dreiecke zusammen ist ein Viertel des Flächeninhalts der Dreiecke im Schritt vorher zusammen.

Grenzprozess: Man erhält eine monoton wachsende Folge von Flächeninhalten, die gegen die Fläche des Parabel-Segments konvergiert. Genauer: diese Folge ist eine geometrische Reihe und ihr Grenzwert ist

$$A_{\text{Parabel-Segment}} = A_{\Delta PQR} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots\right) = A_{\Delta PQR} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} A_{\Delta PQR}$$

Fazit: Das Parabel-Segment hat vier Drittel der Fläche des ersten Dreiecks. Da die Griechen ein Dreieck ohne Schwierigkeit in ein flächengleiches Quadrat verwandeln konnten, war damit die Quadratur des Parabelsegments erledigt - allerdings nicht unter der einschränkenden Bedingung „nur mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Konstruktionsschritten“.

3.2. Integral und Integrierbarkeit

Die moderne Form der Flächenbestimmung einer krummlinig begrenzten ebenen Figur benutzt

- die Koordinatisierung der Ebene
- die Beschreibung des Randes der Figur durch eine oder mehrere Funktionen
- die Approximation der Figur durch einfachste Teilfiguren (Rechtecke)
- die Beschreibung dieses Prozesses durch konvergente Folgen

Eine Fläche wird durch eine geschlossene **Randkurve** begrenzt. Wir stellen uns die Kurve in ein **Koordinatensystem** – sagen wir zunächst einmal: in den ersten Quadranten – gezeichnet vor. Eine Kurve können wir unter gewissen Bedingungen als **Graph einer reellen Funktion** ansehen, also einer Funktion, deren Definitionsmenge und Wertemenge jeweils Teilmengen von \mathbb{R} sind; in der Regel ist die Definitionsmenge ein Intervall. Damit eine Kurve Graph einer reellen Funktion ist, darf sie von einer Parallelen zur y-Achse durch einen Punkt ihrer Definitionsmenge nur einmal geschnitten werden. Eine geschlossene Kurve wird aber in der Regel mindestens zweimal geschnitten. Wenn sie genau zweimal geschnitten wird, betrachtet man zum einen die Kurve der oberen Schnittpunkte – das ist die obere Randkurve (als Graph der oberen Randfunktion) – und zum andern die Kurve der unteren Schnittpunkte – das ist die untere Randkurve (als Graph der unteren Randfunktion). Dann erhält man die Fläche innerhalb der geschlossenen Kurve, indem man von der Fläche zwischen der x-Achse und der oberen Randkurve die Fläche zwischen x-Achse und der unteren Randkurve abzieht. Ähnlich kann man verfahren, wenn die geschlossene Randkurve mehrfach geschnitten wird.

Damit ist das Problem, die Fläche einer krummlinig begrenzten ebenen Figur zu ermitteln, zurückgeführt auf die Frage: Wie kann man die **Fläche zwischen dem Graphen einer (positiven) reellen Funktion f und einem gewissen Intervall $[a|b]$ der x -Achse** berechnen? Wir werden sehen, dass die reelle Funktion eine bestimmte Eigenschaft erfüllen muss, damit das geht: sie muss „integrierbar“ sein.

Wir **approximieren** die Fläche zwischen dem Graphen einer (positiven) reellen Funktion f und einem gewissen Intervall $[a|b]$ der x -Achse durch einfachste Teilfiguren (Rechtecke), indem wir sie zum einen von innen her immer weiter ausschöpfen und zum andern von außen her immer mehr eingrenzen. Dazu zerlegen wir das Intervall $[a|b]$ durch Zwischenpunkte in Teilintervalle. Die Teilungspunkte nummerieren wir durch: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$.

Wir bezeichnen diese **Zerlegung** mit $Z([a|b])$ oder kurz Z und die Länge der Teilintervalle mit $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Diese Intervalle bilden eine Seite der **Rechtecke**. Nun legen wir die gegenüberliegende Seite fest.

Sei m_k die größte untere Schranke und M_k die kleinste obere Schranke der Funktionswerte von f im Intervall $[x_{k-1}|x_k]$. Für die ausschöpfenden Rechtecke wählen wir dann diejenigen mit dem Flächeninhalt $m_k \cdot \Delta_k$, für die von außen eingrenzenden diejenigen mit dem Flächeninhalt $M_k \cdot \Delta_k$. Die Gesamtfläche der ausschöpfenden Rechtecke bezeichnen wir als **Untersumme U_Z** ; der Index Z soll andeuten, dass diese Fläche von der Zerlegung $Z([a|b])$ abhängt. Die Gesamtfläche der von außen eingrenzenden Rechtecke bezeichnen wir als **Obersumme O_Z** . Kurz:

$$U_Z = \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k \qquad O_Z = \sum_{k=1}^n M_k \cdot \Delta_k$$

Für alle Zerlegungen $Z([a|b])$ gilt: $U_Z \leq O_Z$.

Etwas Zerlegungstechnik:

- Wenn Z' eine **Verfeinerung** der Zerlegung Z ist, d.h. außer den Teilungspunkten von Z noch weitere Teilungspunkte des Intervalls $[a|b]$ enthält, dann gilt: $U_Z \leq U_{Z'} \leq O_{Z'} \leq O_Z$
- Sind Z und Z^* zwei beliebige Zerlegungen von $[a|b]$, dann gilt: $U_Z \leq O_{Z^*}$

Die intuitive Vorstellung besagt, dass der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme bei immer feinerer Zerlegung immer kleiner wird. Wir werden sehen, dass das nicht für alle Randkurven bzw. Randfunktionen stimmt. Deshalb geben wir der Eigenschaft von Funktionen, für die unsere intuitive Vorstellung zutrifft, einen Namen:

Definition der integrierbaren Funktion:

Wenn es zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung $Z([a|b])$ gibt, so dass $0 \leq O_Z - U_Z < \varepsilon$ ist, dann heißt die Funktion f im Intervall $[a|b]$ integrierbar.

Wenn die Funktion f integrierbar ist, können wir sicher sein, dass der Unterschied zwischen Ober- und Untersumme mit jeder Verfeinerung der Zerlegung kleiner wird. Zur Bestimmung des Grenzwerts von Ober- und Untersumme setzen wir der Reihe nach $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$ und wählen jeweils Zerlegung aus und erhalten so eine Folge von Zerlegungen $Z_n([a|b])$ mit $0 \leq O_{Z_n} - U_{Z_n} < \frac{1}{n}$. Es gilt: $\langle U_{Z_n} \rangle$ ist eine monoton wachsende Folge, die durch O_{Z_1} nach oben beschränkt ist. Nach dem Monotoniesatz ist sie also konvergent. Da $\langle [U_{Z_n} | O_{Z_n}] \rangle$ eine Inter-

vallschachtelung ist, konvergiert die Folge $\langle O_{z_n} \rangle$ gegen denselben Grenzwert wie die Folge $\langle U_{z_n} \rangle$.

Dieser Grenzwert heißt das **Integral von f über [a|b]**, in Symbolen:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_{z_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n m_k \cdot \Delta_k$$

Das Symbol für das Integral kann man als stilisiertes S ansehen, das die Summation der Rechteckflächen widerspiegelt. Die Fläche der Rechtecke wird als Produkt der Länge der Teilintervalle und eines Funktionswerts in dem jeweiligen Teilintervall berechnet; auch dies spiegelt sich in der Symbolisierung des Grenzwerts wider.

Nachdem wir durch unsere intuitive Vorstellung von der Approximation der krummlinig begrenzten Fläche zum Begriff des Integrals gekommen sind, wenden wir uns jetzt der genaueren Untersuchung der Randkurve bzw. der Randfunktion zu. Der Begriff der Integrierbarkeit sollte zunächst nur sicher stellen, dass wir ein Integral erhalten. Nun fragen wir: Welche Funktionen sind integrierbar, welche nicht? Lassen sich integrierbare bzw. nicht-integrierbare Funktionen näher charakterisieren?

Eine in ihrer Allgemeinheit überraschende, einfach zu beschreibende Klasse liefert der

Satz von der Integrierbarkeit monotoner Funktionen:

Jede monotone Funktion ist integrierbar.

Definition der monotonen Funktion:

Eine Funktion f heißt **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, wenn für alle x_1 und x_2 des Definitionsbereichs gilt: aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Die Funktion f heißt **streng monoton steigend** bzw. **fallend**, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$.

Beispiele:

Die durch $f(x) = \text{dez}_4(x)$ definierte Funktion ist integrierbar. Dabei soll $\text{dez}_4(x)$ heißen, dass die Zahl x , als Dezimalbruch geschrieben, nach vier Nachkommastellen abgebrochen wird. Die Funktion f ist eine Treppenfunktion mit vielen Sprüngen. Sie ist auf jedem Intervall integrierbar, da sie monoton wachsend ist.

Ein Gegenbeispiel, d.h. ein Beispiel für eine nicht-integrierbare Funktion ist die, die bei allen rationalen Werten ihres Definitionsbereichs den Wert 2, bei allen irrationalen Werten den Wert 1 annimmt. Sie ist nicht monoton und hat offensichtlich zu viele Sprünge. Man kann sie auf keinen Fall in einem Zug zeichnen.

Wie schwierig die Grenzziehung zwischen Integrierbarkeit und Nicht-Integrierbarkeit ist, zeigt ein weiteres „Monster“-Beispiel für eine integrierbare Funktion, die durch folgende Funktionsvorschrift definiert ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ oder } x = 1 \text{ oder } x \text{ irrational} \\ \frac{n-1}{n}, & x = \frac{m}{n} \text{ mit teilerfremden } m, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Das „Geheimnis“ der Integrierbarkeit dieser Funktion, die man auch nicht in einem Zug zeichnen kann, liegt darin, dass die „meisten“ Brüche „große“ Nenner haben, der zugehörige Funktionswert also „nahe bei“ 1 liegt, dem gleichen Funktionswert wie bei den „vielen“ irrationalen Zah-

len; die Funktion ist also „fast“ eine konstante Funktion. Durch geeignete Zerlegung muss man dafür sorgen, dass für die „relativ wenigen“ Brüche mit „kleinem“ Nenner die Teilintervalle, in denen sie liegen, in der Summe „genügend klein“ werden, so dass sie „nur unwesentlich“ zur Gesamtfläche beitragen. Beim Beweis gilt es, die „...“-Beschreibungen mit Hilfe des ε -Spiels zu präzisieren.

Für das Rechnen mit Integralen gibt es ein paar einfache Eigenschaften, die zugleich intuitive Vorstellungen beim Umgang mit Flächen widerspiegeln:

Additivität des Integrals – Zerlegung der Fläche:

Sei f auf $[a|b]$ integrierbar und $a < c < b$, dann gilt: $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$

Linearität des Integrals – Streckung und Addition von Flächen:

Sind f und g auf $[a|b]$ integrierbar und ist c eine Konstante, dann sind auch $c \cdot f$ und $f + g$ integrierbar und es gilt:

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx \text{ und } \int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

Ordnungstreue des Integrals – Größenvergleich von Flächen:

Sind f und g auf $[a|b]$ integrierbar und gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \in [a|b]$, dann gilt auch:

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3.3. Grundvorstellungen des Integrierens

Bisher haben wir Integrieren als **Flächenbestimmung** einer krummlinig begrenzten ebenen Figur durch Approximation der Figur durch einfachste Teilfiguren (Rechtecke) kennen gelernt. Formal erfolgt diese Approximation durch **Aufsummieren von Produkten**, wobei die Produkte in geometrischer Sicht Flächeninhalte von Rechtecken sind.

Ebenso kann man sich dem Problem der **Volumenbestimmung** eines Körpers nähern. Allerdings wird der theoretische Aufwand dann erheblich größer. Ein noch vergleichsweise einfacher Fall sind Rotationskörper; man kann sie sich entstanden denken, indem man eine Randkurve im 1. Quadranten um die x -Achse rotieren lässt. Dann werden aus den Rechtecken, die wir oben zur Approximation des Flächeninhalts der krummlinig begrenzten ebenen Figur benutzt haben, kreisförmige Scheiben (Zylinder), die das Volumen des Rotationskörpers von innen ausschöpfen bzw. von außen eingrenzen. Das Volumen einer solchen Scheibe ist $\pi \cdot m_k^2 \cdot \Delta_k$ bzw. $\pi \cdot M_k^2 \cdot \Delta_k$. Für das Volumen des Rotationskörpers gilt also:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \pi \cdot m_k^2 \cdot \Delta_k = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx$$

Kann man auch die **Länge einer Kurve** berechnen, wenn diese nicht geradlinig verläuft? Man kann, die Grundidee ist wieder dieselbe: wir denken uns die Kurve durch viele kleine aneinandergelagte Strecken approximiert, ähnlich wie Archimedes den Kreis durch n -Ecke mit immer größer werdender Eckenzahl approximiert. Wie bei der Randkurve einer Fläche setzt das Verfahren gewisse Bedingungen an die Kurve bzw. an die Funktion, die sie beschreibt, voraus: die Kurve muss durch einen Streckenzug approximierbar sein – sie heißt dann „**rektifizierbar**“; wir werden sehen: sie muss in jedem Punkt durch eine Gerade approximierbar sein, eine Tangente haben, die Funktion muss differenzierbar sein (vgl. Kap. 4.2.)

Unter einem **Kurvenstück** K_f verstehen wir einen Teil des Graphen einer reellen Funktion f : $K_f = \{(x|y)|y = f(x), a \leq x \leq b\}$. Wir bestimmen nun die Länge L dieses Kurvenstücks.

Wir zerlegen das Intervall $[a|b]$ in Teilintervalle $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Die Länge der Teilintervalle bezeichnen wir wieder mit $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$. Die zugehörigen Punkte auf der Kurve heißen P_0, P_1, \dots, P_n , also allgemein $P_k = (x_k|f(x_k))$. Wir verbinden die Punkte durch einen Streckenzug. Für die Länge s_k der Teilstrecke von P_{k-1} nach P_k gilt nach dem Satz des Pythagoras $s_k^2 = \Delta_k^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 = \left(1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta_k}\right)^2\right) \cdot \Delta_k^2$.

Die Gesamtlänge des Streckenzugs ist $L_Z = \sum_{k=1}^n s_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\Delta_k}\right)^2} \cdot \Delta_k$.

Beachte: Es erfolgt wieder eine Aufsummierung von Produkten.

L_Z ist eine untere Schranke für die gesuchte Länge L . Wenn Z' eine Verfeinerung von Z ist, dann gilt $L_{Z'} \geq L_Z$.

Definition der Rektifizierbarkeit:

Wenn L_Z für alle Zerlegungen nach oben beschränkt ist, dann heißt das Kurvenstück K_f rektifizierbar und seine Länge ist die kleinste obere Schranke aller L_Z .

Satz:

Wenn in jedem Punkt des Intervalls $[a|b]$ die Funktion f differenzierbar und ihre Ableitung f' stetig ist, dann ist K_f rektifizierbar und seine Länge ist

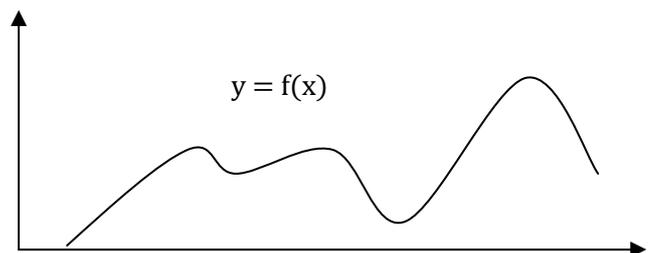
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Flächenbestimmung, Volumenbestimmung und sogar bei der Längenberechnung - immer geht es um das Aufsummieren von Produkte, die Anzahl der Summanden wird immer größer, die Produkte werden immer kleiner.

Es gibt noch eine weitere Grundvorstellung des Integrierens: **Integrieren heißt Mitteln**

Beispiel: Die Kurve zeigt den Temperaturverlauf in einem gewissen Zeitintervall oder die Momentangeschwindigkeit eines Autos in einem gewissen Zeitintervall.

Wie groß ist die Durchschnittstemperatur bzw. die Durchschnittsgeschwindigkeit?



Ansatz:

Miss die Temperatur / Geschwindigkeit zu gewissen Zeitpunkten $a=x_0, x_1, x_2, \dots, x_n=b$ des Zeitintervalls $[a|b]$. Als Durchschnittstemperatur / -geschwindigkeit bietet sich das arithmetische Mittel an, das ist die Summe der Messwerte durch die Anzahl der Messpunkte, als Formel:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

Das ist nur dann exakt, wenn zwischen zwei Messpunkten die Temperatur/ Geschwindigkeit konstant ist und die Zeitabstände gleich sind.

1. Verbesserung:

Wenn die Zeitabstände $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$ nicht gleich sind, muss jeder Messwert $f(x_k)$ mit einem „Gewicht“ versehen werden, nämlich dem Anteil des jeweiligen Zeitabstands Δ_k an der Gesamtdauer $b - a$. Als bessere Approximation bietet sich also das gewichtete arithmetische Mittel an:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\Delta_k}{b-a} \cdot f(x_k) = \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k \cdot f(x_k)$$

2. Verbesserung:

In der Regel ist die Temperatur / Geschwindigkeit zwischen zwei Messpunkten nicht konstant. Ist m_k bzw. M_k die größte untere bzw. kleinste obere Schranke von f in dem Zeitintervall $[x_{k-1}|x_k]$, dann gilt die Abschätzung

$$\frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k \cdot m_k \leq \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k \cdot f(x_k) \leq \frac{1}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^n \Delta_k \cdot M_k$$

Die Summen links und rechts sind die Unter- bzw. Obersumme bei der Integration der Funktion f im Intervall $[a|b]$. Wenn f integrierbar ist (also z.B. wenn die Temperatur/ Geschwindigkeit sich stetig verändert), erhält man als Durchschnittstemperatur bzw. -geschwindigkeit den Mittelwert

$$\mu(f) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

4. Funktionen

Wir haben bisher den Funktionsbegriff, auf gewisse Vorkenntnisse vertrauend, an drei Stellen in Gebrauch genommen. Das erste Mal beim Anzahlvergleich von Mengen (Kap. 1.1.). Das zweite mal bei Folgen, die wir auch als Abbildungen bzw. Funktionen von den natürlichen Zahlen auf die reellen Zahlen oder auf Intervalle interpretiert haben (Kap. 1.2.); dort haben wir allerdings diese Sicht nicht weiter vertieft. Zum dritten Mal bei der Randkurve einer Figur, deren Fläche wir bestimmen wollten; da haben wir uns ein Stück weit mit dem Verhalten der Randfunktion beschäftigt (Kap. 3.2.). Ehe wir diese Betrachtung in Kap. 4.2. wieder aufgreifen, sollen in Kap. 4.1. grundlegende Eigenschaften beliebiger, besonders aber reeller Funktionen zusammengetragen werden.

4.1. Grundlegende Eigenschaften

Grundbedingung für eine Funktion f ist: Jedes Element des Definitionsbereichs wird abgebildet und ein Element des Definitionsbereichs wird nur einem Element des Wertebereichs zugeordnet.

Diesen fundamentalen Aspekt des Funktionsbegriffs wollen wir **Zuweisungs- oder Zuordnungsaspekt** nennen. Eine Funktion kann man sich als Input-Output-Maschine (Eingabe-Ausgabe-Maschine) vorstellen. Sie nimmt ein Element als Eingabe entgegen und gibt daraufhin ein Element aus. Und das macht sie nach einer genauen (**eindeutigen**) Vorschrift: Gleiche Eingaben führen immer zu gleichen Ausgaben. Die wichtigsten Beispiele sind Folgen (Definitionsbereich \mathbb{N} , Wertebereich meist \mathbb{R}) und reelle Funktionen (Definition- und Wertebereich sind Teilmengen von \mathbb{R} , meist Intervalle).

Man schreibt $f : A \rightarrow B$ (lies: „f bildet die Menge A in die Menge B ab“); A ist der Definitionsbereich, alle Elemente daraus werden abgebildet; in B müssen nicht alle Elemente getroffen werden. Für die Abbildung im Einzelnen schreibt man $f : x \mapsto y$ (**Funktionsvorschrift**) (lies: „f weist das x dem y zu“) oder $y = f(x)$ (**Funktionsgleichung**) (lies: „y ist gleich f von x“, damit ist gemeint: „y wird durch die Vorschrift f aus der Eingabe x ermittelt“).

Sprachverwirrung: Umgangssprachlich und auch in vielen Lehrbüchern findet man die Redeweise „y wird dem x zugeordnet“ und meint damit „x wird auf y abgebildet“.

Eine Funktion ist also durch drei Angaben festgelegt: Definitionsbereich, Wertebereich, Funktionsvorschrift (oder Funktionsgleichung).

Anders ausgedrückt: zwei Funktionen $f : A \rightarrow B$ und $g : C \rightarrow D$ sind genau dann **gleich**, wenn gilt:

- (i) $A = C$, (ii) $B = D$ und (iii) $f(x) = g(x)$ für alle $x \in A$.

Ist A' eine Teilmenge des Definitionsbereichs A, dann heißt $f(A') = \{f(x) | x \in A'\}$ das **Bild** von A' (unter f). Ist B' eine Teilmenge des Wertebereichs B, dann heißt $f^{-1}(B') = \{x | f(x) \in B'\}$ das **Urbild** von B' (unter f).

Sonderfälle von Funktionen:

Die **identische Funktion** $\text{id} : A \rightarrow A$ ist eine Abbildung einer Menge auf sich selbst, die jedes Element sich selbst zuordnet, also $\text{id} : x \mapsto x$.

Eine **konstante Funktion** $f : A \rightarrow B$ bildet alle Elemente von A auf ein und dasselbe Element von B ab; also lautet die Funktionsvorschrift $f : x \mapsto b$ für alle $x \in A$ mit einem festen $b \in B$; die Funktionsgleichung lautet $y = b$ für alle $x \in A$.

Wichtige Eigenschaften einer Funktion $f : A \rightarrow B$:

Injektivität: Verschiedene Elemente aus A werden auf verschiedene Elemente in B abgebildet; d.h. aus $f(x_1) = f(x_2)$ folgt $x_1 = x_2$ für alle $x_1, x_2 \in A$.

Surjektivität: Jedes Element von B ist Bild eines Elements aus A, d.h. zu jedem $y \in B$ gibt es (mindestens) ein $x \in A$, so dass $y = f(x)$ ist.

Bijektivität: Die Funktion ist sowohl injektiv als auch surjektiv. Man spricht auch von einer umkehrbar eindeutigen bzw. eineindeutigen Zuordnung.

Hintereinanderausführung (HAF) von Funktionen $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$:

Ist f eine surjektive Abbildung der Menge A in die Menge B und g eine beliebige Abbildung der Menge B in die Menge C, dann kann man eine Abbildung der Menge A in die Menge C definieren, die ein beliebiges Element $x \in A$ zunächst dem Element $y = f(x)$ und dieses dann dem Element $z = g(y)$ zuordnet. Es ist also: $z = g(f(x))$. Man bezeichnet die neue Funktion als **Hintereinanderausführung (HAF) von f und g**.

Schreibweise: In algebraisch/ geometrischen Kontexten findet man für die HAF meistens: $f \circ g$ (lies: „erst f, dann g“); beachte: Dann ist $(f \circ g)(x) = g(f(x))$. In der Analysis schreibt man meistens $g \circ f$ (lies: „g nach f“); beachte: dann ist $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Es gilt:

Wenn f und g surjektiv/ injektiv/ bijektiv sind, dann ist $g \circ f$ surjektiv/ injektiv/ bijektiv.

Für die HAF von drei Funktionen f, g, h gilt das Assoziativgesetz. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

Wenn $f: A \rightarrow B$ bijektiv ist (und nur dann), gibt es eine Umkehrfunktion $f^{-1}: B \rightarrow A$ mit $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$ und $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$

Die Variable x , für die ein Element des Definitionsbereichs der Funktion f eingesetzt werden kann – man spricht auch vom **Argument von $f(x)$** –, heißt **unabhängige Variable**, die zugehörige Variable $y (= f(x))$ des Wertebereichs heißt **abhängige Variable**. Eine ältere Bezeichnung für Variable im Zusammenhang mit Funktionen ist **Veränderliche**. Bestehen Definitions- und Wertebereich aus reellen Zahlen und fasst man für x einen speziellen Wert (= Punkt auf der Zahlengeraden) ins Auge, spricht man auch von der **Stelle x** und nennt $f(x)$ den **Funktionswert an der Stelle x** .

Bei reellen Funktionen tritt zu dem **Zuweisungs- oder Zuordnungsaspekt** („Welche Zahl wird welcher zugeordnet?“ oder „Durch welche Vorschrift wird die Zahl x der Zahl y zugeordnet?“) noch ein zweiter fundamentaler Aspekt hinzu, der **Veränderungsaspekt**: „Wie ändert sich y , wenn sich x so oder so ändert (z.B. größer wird oder verdoppelt wird oder)?“ In der Literatur findet man auch die Bezeichnung „Kovariation“ für diesen Aspekt.

Es gibt drei verschiedene **Darstellungsformen** einer reellen Funktion: die (Werte-) Tabelle, den Graphen und den Rechenausdruck.

In einer **Tabelle** kann man grundsätzlich nur endlich viele (wenige) Zahlen des Definitionsbereichs Zahlen des Wertebereichs zuordnen. Der Definitionsbereich einer reellen Funktion besteht (ebenso wie bei einer Folge) aus unendlich vielen Zahlen; deshalb werden in der Regel implizite Annahmen über die Fortsetzung einer erkannten oder vermuteten Regel auf die übrigen Zahlen des Definitionsbereichs gemacht. Tatsächlich gibt es jedoch unendlich viele verschiedene Funktionen, die in einer vorgegebenen endlichen Tabelle überein stimmen (vgl. die Beispiele in Kap. 1.2.). Nur unter zusätzlichen, stark einschränkenden Bedingungen an die Funktion oder ihren Verlauf beschreibt eine Tabelle eine Funktion eindeutig.

Die Tabelle ist die historisch älteste Darstellung einer Funktion. Später und auch unabhängig davon entwickelten sich **zeichnerische Darstellungen** von Funktionen.

Wenn der Definitionsbereich aus fortlaufenden natürlichen Zahlen besteht, können die („diskreten“) zugehörigen Zahlen des Wertebereichs als fortlaufende Blöcke oder Balken oder in figürlicher Form, abhängig von der Größe des Wertes, dargestellt werden (**Block- oder Balkendiagramm** oder **Piktogramm**).

In Fortführung dieser Idee wird bei reellen Funktionen der Definitionsbereich (ein reelles Intervall) als Strecke auf der Zahlengeraden dargestellt und über jedem Punkt der Strecke der zugehörige Funktionswert als senkrechte Strecke gedacht: der zweite Endpunkt dieser Strecke beschreibt dann i.a. eine **Kurve**. Diese Darstellung ist besonders dann plausibel, wenn das Argument x als Zeitpunkt zu interpretieren ist und die zugehörigen („kontinuierlichen“) Funktionswerte den Verlauf eines Prozesses (z.B. den zurückgelegten Weg oder die Temperaturschwankung) beschreiben. Solche Kurven waren als Darstellung von Funktionen schon lange in Gebrauch, bevor René Descartes (1596–1650) die Beschreibung der Ebene durch Koordinaten („kartesisches Koordinatensystem“) einführte. Als **Funktionsgraph** wird in der Regel heute die Darstellung im Koordinatensystem bezeichnet.

Computerprogramme zur grafischen Darstellung von Funktionen heißen Funktionsplotter. Die

wesentlichen Fähigkeiten eines Funktionenplotters sind auch auf einem graphikfähigen Taschenrechner verfügbar.

Wegen der Eindeutigkeit der Zuordnung kann jede Parallele zur y-Achse den Funktionsgraph nur einmal schneiden. Schneidet also eine Parallele zur y-Achse eine Kurve (z.B. einen Kreis) mehr als einmal, dann kann diese Kurve nicht Funktionsgraph einer reellen Funktion sein.

Es bedurfte der Entwicklung der algebraischen Denk- und Schreibweise (z.B. Buchstaben als Namen für Variable), um zu der dritten Darstellungsform von Funktionen zu kommen, der Beschreibung der Zuordnung durch einen **Rechenausdruck**; damit ist eine Formel oder ein Term gemeint, mit dem man zu jedem Argument x den Funktionswert $f(x)$ berechnen kann; ob dieser Ausdruck in eine Funktionsvorschrift oder eine Funktionsgleichung eingebaut ist, spielt dabei keine Rolle. Der Rechenausdruck kann aus mehreren abschnittsweise definierten Termen bestehen, z.B. lässt sich die Betragsfunktion so schreiben:

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

In allen Fällen, in denen Funktionswerte durch die direkte Auswertung eines Ausdrucks berechnet werden können, liegt eine **explizite Funktionsdarstellung** vor.

Eine **Gleichung mit zwei Variablen** kann eine **implizite Funktionsdarstellung** sein. Um zu prüfen, ob tatsächlich eine Funktion implizit beschrieben ist, muss man weitere Untersuchungen anstellen. In der Gleichung $y^2 + 2y + x^2 = 0$ hängen die beiden Größen x und y voneinander ab. Allerdings ist die Variable y hier noch nicht "freigelegt"; löst man die Gleichung nach y auf erhält man zwei Funktionsgleichungen, also zwei Funktionen, nämlich $y = -1 + \sqrt{1 - x^2}$ und $y = -1 - \sqrt{1 - x^2}$. Zudem kann x nicht beliebig vorgegeben werden, denn aufgrund der Wurzel sind beide Funktionen (im Rahmen der reellen Zahlen) nur für $-1 \leq x \leq 1$ definiert.

Implizite Funktionsdarstellungen sind wichtig, da viele funktionale Zusammenhänge (vor allem in Anwendungsbereichen) oft zunächst nur implizit beschrieben werden können. Manchmal ist es auch ganz einfach bequemer, eine bestimmte Funktion in impliziter statt in expliziter Form anzugeben. Den Zusammenhang zwischen einer Gleichung mit zwei Variablen und einer zugehörigen Funktion macht man sich in der Gleichungslehre bei der grafischen Interpretation der Lösung von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten zu nutze.

Als Johannes Kepler um das Jahr 1619 an seinem dritten Gesetz über den Umlauf der Planeten um die Sonne arbeitete, stieß er auf eine Gleichung der Form $2y - \sin y = x$. Hier gibt es zu jedem x genau ein y , das die Gleichung erfüllt; d.h. die Gleichung beschreibt eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Von dieser Funktion kann man beweisen, dass sie sich nicht in expliziter Form $y = f(x)$ mit Hilfe eines Terms $f(x)$, der aus den uns bekannten Rechenoperationen und Funktionen aufgebaut ist, darstellen lässt! Das bedeutet nicht, dass man sie nicht ebenso untersuchen kann wie andere Funktionen auch. Man kann zum Beispiel zeigen, dass sie nur an der Stelle $x = 0$ den Wert 0 hat, dass $f(2\pi) = 4\pi$ gilt und dass sie streng monoton wachsend ist. Aber durch das Fehlen einer expliziten Darstellung ist es ein bisschen mühsam, diese Informationen zu erlangen.

Zentrale Aktivitäten in den Darstellungsformen von Funktionen sind

- die Untersuchung des Zuweisungs- und des Veränderungsaspekts in der jeweiligen Darstellungsform

- die Übertragung aus einer Darstellungsform in eine andere

Besondere Stellen des Definitionsbereichs:

Eine Stelle x des Definitionsbereichs, an der die Funktion f den Wert Null annimmt, heißt **Nullstelle** der Funktion. Die Lösung einer Gleichung mit einer Unbekannten der Gestalt $f(x) = 0$ kann man als Bestimmung der Nullstellen einer Funktion f verstehen, deren Funktionsterm $f(x)$ ist. Durch diese Sichtweise können sich neue Wege zur Lösung der Gleichung erschließen.

Es kann geschehen, dass ein Rechenausdruck $f(x)$ an der einen oder anderen Stelle x des Definitionsbereichs nicht definiert ist, z.B. weil er Bruchform hat und der Nenner beim Einsetzen eines bestimmten Wertes Null ergibt. Man spricht dann auch von einer **Definitionslücke** oder **Singularität**. Dann gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Beim Betrachten des Funktionsgraphen zeigt sich, dass sich die Definitionslücke auf „natürliche“ Weise schließen lässt; präzise heißt das, dass es eine stetige (s.u.) Funktion g gibt, die mit der Funktion f an allen Stellen, an denen $f(x)$ berechenbar ist, übereinstimmt und außerdem an der Stelle, wo f eine Definitionslücke aufweist, wohl definiert ist, d.h. einen berechenbaren Wert ergibt. Manchmal (z.B. bei Polynomfunktionen) erhält man durch Umformen (und „Kürzen“) des ursprünglichen Funktionsterms einen Funktionsterm, der die Definitionslücke nicht mehr aufweist. In solchen Fällen spricht man von einer **hebbaren Singularität**.
2. Es handelt sich um eine **Unendlichkeitsstelle** oder **eigentliche Singularität**. Man könnte dann zwar an dieser Stelle einen Funktionswert willkürlich festlegen und damit eine Funktion ohne Definitionslücke kreieren. Sie wäre jedoch nicht stetig.

Besondere Verläufe des Funktionsgraphen:

(Streng) monoton wachsende bzw. **monoton fallende** Funktionen haben wir schon betrachtet, (Kap. 3.2). Eine Funktion heißt **positiv** bzw. **negativ**, wenn alle Funktionswerte positiv bzw. negativ sind. Der Funktionsgraph verläuft ganz im 1. und 2. Quadranten bzw. im 3. und 4. Quadranten.

Eine Funktion heißt **nach oben bzw. nach unten beschränkt**, wenn es eine Zahl c gibt, so dass für alle Zahlen x des Definitionsbereichs $f(x) \leq c$ bzw. $f(x) \geq c$ gilt. Eine Funktion heißt **beschränkt**, wenn sie sowohl nach oben wie nach unten beschränkt ist; das ist gleichbedeutend damit, dass es eine positive Zahl c gibt, so dass der absolute Betrag aller Funktionswerte höchstens gleich c ist, kurz: für alle x des Definitionsbereichs $|f(x)| \leq c$ gilt. Der Funktionsgraph einer beschränkten Funktion verläuft ganz in einem Parallelstreifen zur x -Achse.

Eine Funktion, deren Funktionswerte sich in regelmäßigen Abständen wiederholen, heißt **periodisch**. Die charakterisierende Eigenschaft ist also, dass es eine Zahl p gibt, so dass für alle x des Definitionsbereichs $f(x + p) = f(x)$ gilt; die kleinste positive Zahl p , die dieser Bedingung genügt, heißt Periode der Funktion f .

4.2. Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Integrierbarkeit - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Bei **reellen Funktionen**, deren Funktionsgraph eine Kurve im Koordinatensystem ist, kann man weitere Verlaufsformen unterscheiden.

Stetigkeit

Hat die Kurve an einer Stelle einen **Sprung**, nennt man die Funktion **unstetig**. Die Stetigkeit/ Unstetigkeit ist eine **lokale Eigenschaft**, d.h. eine Eigenschaft der Funktion in einem Punkt x_0 , abhängig vom Verhalten der Funktion in der Umgebung des Punktes. Es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten, den Begriff der Stetigkeit zu präzisieren. Hier ist eine:

Definition der Stetigkeit

Eine im Intervall $[a,b]$ definierte Funktion f heißt stetig im Punkt $x_0 \in [a,b]$, wenn folgendes gilt:
Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ gibt es eine Schwankungsbreite $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$ aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Kurz: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ oder (setze $x = x_0 + h$): $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

Klar: Eine an der Stelle x_0 stetige Funktion kann dort keinen Sprung haben (warum?).

Es gibt aber noch einen 2. Typ Unstetigkeit: **zu starke Schwankung** der Funktionswerte.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Ist eine Funktion f in jedem Punkt eines Intervalls $[a|b]$ stetig, dann sagt man: f ist im Intervall $[a|b]$ stetig. Aus der lokalen Eigenschaft wird eine globale Eigenschaft.

Differenzierbarkeit

Hat die Kurve zwar keinen Sprung, aber einen **Knick** an einer Stelle, d.h. ändert sie an der Stelle sprunghaft ihre Richtung, so ist sie zwar stetig, aber nicht **differenzierbar**. Positiv ausgedrückt bedeutet Differenzierbarkeit: Es gibt eine Gerade mit bestimmter Richtung durch den Kurvenpunkt - **Tangente** genannt -, so dass man zu jeder Toleranzgrenze für die Öffnung des Richtungstrichters² eine Umgebung der Stelle finden kann, in der sich die Kurve nicht aus dem Richtungstrichter entfernt. Es gibt mehrere äquivalente Möglichkeiten, den Begriff der Differenzierbarkeit zu präzisieren. Hier ist eine:

Definition der Differenzierbarkeit:

Eine im Intervall $[a,b]$ definierte Funktion F heißt differenzierbar im Punkt $x_0 \in [a,b]$, wenn es eine reelle Zahl m mit folgender Eigenschaft gibt:

Zu jeder Toleranzgrenze $\varepsilon > 0$ gibt es eine Schwankungsbreite $\delta > 0$, so dass für alle $x \in [a,b]$

aus $|x - x_0| < \delta$ folgt $\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - m \right| < \varepsilon$

Statt m schreibt man $F'(x_0)$ und nennt diesen Wert die **Ableitung von F an der Stelle x_0** .

Kurz: $F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0}$ oder (setze $x = x_0 + h$): $F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h}$

² Ein Richtungstrichter ist festgelegt durch zwei Geraden durch den Kurvenpunkt, deren Steigung um die Toleranzgrenze positiv wie negativ von der Tangente abweichen.

Die Differenzierbarkeit ist also wie die Stetigkeit eine **lokale Eigenschaft**, d.h. eine Eigenschaft der Funktion in einem Punkt x_0 , abhängig vom Verhalten der Funktion in der Umgebung des Punktes. Es gilt:

Ist eine Funktion f in einem Punkt x_0 differenzierbar, dann ist f in x_0 stetig. Die Umkehrung ist im Allgemeinen falsch.

Anders als bei der Stetigkeit ist mit der Differenzierbarkeit die Berechnung eines Wertes m (der Steigung der Tangente) und damit die Zuordnung dieses Wertes zu der Stelle, an der man die Differenzierbarkeit untersucht, verbunden. Diese Zuordnung bezeichnet man auch mit dem Verb „ableiten“; ein vergleichbares Verb gibt es zur Stetigkeit nicht.

Ist eine Funktion F in jedem Punkt eines Intervalls $[a|b]$ differenzierbar, dann sagt man: F ist im Intervall $[a|b]$ differenzierbar. Aus der lokalen Eigenschaft wird eine globale. Leitet man F in jedem Punkt des Intervalls $[a|b]$ ab, erhält man eine neue Funktion, die jeden Punkt des Intervalls auf die Ableitung von F in diesem Punkt abbildet; man nennt sie die Ableitung(sfunktion) von F im Intervall $[a|b]$ und sie mit F' .

Es ist naheliegend, nach der Umkehrung dieses Vorgangs zu fragen: Gegeben sei eine Funktion f im Intervall $[a|b]$. Gibt es eine Funktion \hat{f} , deren Ableitung(sfunktion) f ist, d.h. dass $(\hat{f})' = f$ gilt? Eine solche Funktion \hat{f} nennt man die **Stammfunktion** von f . Zu einer gegebenen Funktion f eine Stammfunktion zu bestimmen, nannte man früher auch „aufleiten“.

Integrierbarkeit

Wir hatten gesehen: Eine (Rand-)Funktion f ist schon unter vergleichsweise schwachen Einschränkungen **integrierbar**: Z.B. sind „Treppenfunktionen“, also unstetige Funktionen, integrierbar. Wenn f auf dem Intervall $[a|b]$ integrierbar ist, dann ist f auch auf jedem Intervall $[a|x]$ mit $a \leq x \leq b$ integrierbar. Man erhält eine neue Funktion, die jeden Punkt x des Intervalls auf das Integral von f im Intervall $[a|x]$ abbildet; man nennt sie die **Flächeninhaltsfunktion oder Integralfunktion von f** . Wir bezeichnen sie mit F . Es gilt also:

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Beachte: Um eine Verwirrung mit dem Punkt x des Intervalls, der zugleich die obere Integrationsgrenze ist, zu vermeiden, wird unter dem Integral eine andere Variable (hier: t) benutzt.

Interessant ist es, den **Zusammenhang zwischen der Randfunktion f und dem Graphen der Flächeninhaltsfunktion F** zu untersuchen. Anschaulich stellt man fest:

Randfunktionen mit Sprüngen erzeugen Flächeninhaltsfunktionen mit Knicken. Randfunktionen ohne Sprünge erzeugen Flächeninhaltsfunktionen ohne Knicke.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung präzisiert diesen Zusammenhang zwischen Stetigkeit, Integrierbarkeit und Differenzierbarkeit.

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ist die Funktion f im Intervall $[a,b]$ stetig, dann ist die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ im Intervall $[a,b]$ differenzierbar und es gilt $F'(x) = f(x)$.

Kurz: Für alle $x \in [a,b]$ gilt:
$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h} = f(x)$$

Der anschauliche/leichte Teil im Beweis des Hauptsatzes ist:

Wenn die Funktion f im Intervall $[a,b]$ integrierbar ist und wenn f stetig im Punkt $x_0 \in [a,b]$ ist, dann ist die Integralfunktion $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ differenzierbar in x_0 und es gilt $F'(x_0) = f(x_0)$.

Der technische/schwierige Teil im Beweis des Hauptsatzes ist:

Ist die Funktion f im Intervall $[a,b]$ stetig, dann ist f im Intervall $[a,b]$ integrierbar (d.h. die Voraussetzung „wenn die Funktion f auf $[a,b]$ integrierbar ist“ im obigen Teil ist automatisch erfüllt.)

(Die Schwierigkeit des Beweises liegt im Folgenden: Die Schwankungsbreiten δ in der Stetigkeitsdefinition hängen von den jeweiligen Punkten x_0 ab. Um sie als Intervalllängen Δ_k in der Untersumme U_Z und in der Obersumme O_Z für alle möglichen Zerlegungen Z verwenden zu können, muss man erst nachweisen, dass es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine für alle Punkte $x_0 \in [a,b]$ gleichermaßen gültige Schwankungsbreite δ gibt.)

Der besondere Nutzen des Hauptsatzes ist, dass man die Umkehrung des Ableitens, das Aufleiten, benutzen kann, um eine Flächeninhaltsfunktion bzw. Integralfunktion zu ermitteln. Der Hauptsatz besagt: **Wenn f stetig ist, dann gilt: Integralfunktion von f = Stammfunktion von f .**

Wenn die Voraussetzung der Stetigkeit nicht erfüllt ist, fallen beide Begriffe auseinander.

Die durch $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ definierte Funktion f ist integrierbar im Intervall $[0|2]$, besitzt also eine Integralfunktion F ; F ist aber in $x_0 = 1$ nicht differenzierbar, ist also keine Stammfunktion von f .

Die durch $\hat{f}(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ definierte Funktion ist differenzierbar in $[0|1]$; ihre Ableitung ist $f(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$; d.h. \hat{f} ist Stammfunktion von f . Die Funktion f ist aber nicht integrierbar in $[0|1]$, besitzt also keine Integralfunktion.

Rückschau

Integrierbarkeit als Funktionseigenschaft (der Randfunktion) wird definiert, um die Existenz des Integrals sicherzustellen und ist eine „globale“ Eigenschaft, also eine Eigenschaft der Funktion in einem Intervall. Um die Integrierbarkeit einer Funktion mit Hilfe der Definition nachzuweisen, muss man das ε -Spiel für die Differenz von Ober- und Untersumme spielen. Das ist mühsam. Und überraschend: Es gibt Funktionen, deren Graph man wegen unendlich vieler Sprünge nicht zeichnen kann, die aber trotzdem integrierbar sind. Hat eine Funktion in einem Intervall keine Sprünge, d.h. ist die in dem Intervall stetig, dann ist sie integrierbar (Teilaussage des Hauptsatzes).

Ein Sprung ist eine lokale Eigenschaft, „kein Sprung“ wird daher lokal definiert als Stetigkeit in einem Punkt. Um die **Stetigkeit** mit Hilfe der Definition nachzuweisen, muss man das ε -Spiel spielen. Müsste man das für jede einzelne Funktion machen, wäre das mühsam. Man kann aber zeigen, dass die Summe, die Differenz, das Produkt, der Quotient (natürlich Nenner \neq Null) und

die Hintereinanderausführung stetiger Funktionen wieder stetige Funktionen sind. Da z.B. die Identität (d.h. $f(x) = x$) eine stetige Funktion ist, erhält man so schon die Stetigkeit der Polynomfunktionen und noch mehr. Typisch für eine mathematische Definition ist wieder, dass man außer den intuitiv klaren Beispielen, von denen man ja ausgegangen ist, als „Nebeneffekt“ auch Beispiele für stetige und unstetige Funktionen erhält, die man vorher nicht im Blick hatte.

Das Gleiche gilt für die **Differenzierbarkeit**. „Intuitiv“ ist eine differenzierbare Funktion eine solche, deren Graph glatt ist, also keine Knicke hat. Ein Knick ist eine lokale Eigenschaft, „kein Knick“ wird daher lokal definiert als Differenzierbarkeit in einem Punkt. Mit Hilfe des ε -Spiels muss die Existenz einer Zahl nachgewiesen werden, die man als Steigung einer den Funktionsgraphen optimal approximierenden Geraden, der Tangente, interpretieren kann. Eine in einem Punkt differenzierbare Funktion ist dort auch stetig.

Betrachtet man Stetigkeit und Differenzierbarkeit global in einem Intervall, dann sind die drei Eigenschaften Integrierbarkeit, Stetigkeit, Differenzierbarkeit durch Inklusion verbunden: **Aus Differenzierbarkeit folgt Stetigkeit, aus Stetigkeit Integrierbarkeit**. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung sagt aber noch mehr: **Integriert man eine stetige Randfunktion, dann ist die Flächeninhaltsfunktion differenzierbar und ihre Ableitungsfunktion ist die Randfunktion**. Oder anders: **Ist eine Funktion differenzierbar und ihre Ableitungsfunktion stetig** (was nicht selbstverständlich ist!), **dann ist die Ableitungsfunktion integrierbar und die zugehörige Integralfunktion bis auf eine Konstante gleich der ursprünglichen Funktion**.