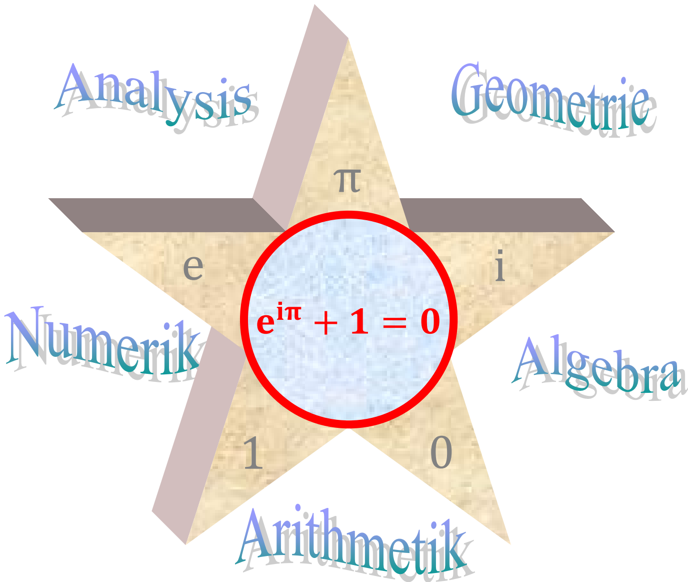


π i e

Skript Wintersemester 2017/18

Prof. Dr. Hans-Dieter Rinkens

Inhalt

Vorwort

Kapitel π: π in der Geometrie

- π.1 Umfang und Flächeninhalt des Kreises
- π.2 Approximation von π mit Hilfe von regelmäßigen Vielecken
- π.3 Die Quadratur des Kreises
- π.4 π in der Trigonometrie

Kapitel i: Komplexe Zahlen

- i.1 Zahlbereichserweiterungen
- i.2 Einführung der komplexen Zahlen
- i.3 Gaußsche Zahlenebene
- i.4 Potenzieren und Wurzelziehen
- i.5 Fundamentalsatz der Algebra

Kapitel e: Exponentialfunktionen

- e.1 Erweiterung des Potenzbegriffs
- e.2 Proportionales Wachstum und Exponentialfunktionen
- e.3 Die e-Funktion

Kapitel Finale

- Finale.1 Die Eulersche Formel
- Finale.2 Nochmal Potenzen
- Finale.3 Faszinierende π-Formeln
- Finale.4 π und Kettenbrüche
- Finale.5 e und π in der Welt der reellen Zahlen

Vorwort

In dieser Veranstaltung geht es um die fünf „wichtigsten" Zahlen: Außer 0 und 1 gibt es kaum noch wichtigere Zahlen als π, i und e.

- Die Kreiszahl π ist nicht nur eine Sache der Geometrie: Bekanntes wird aufgefrischt und Erstaunliches (hoffentlich) hinzugelernt.
- Die imaginäre Einheit i befreit uns von der Rechenstörung, aus negativen Zahlen nicht die Wurzel ziehen zu dürfen / zu können.
- Die Euler-Zahl e liegt fast allen Wachstums- und Zerfallsprozessen zugrunde: Die e-Funktion ist wohl die wichtigste mathematische Funktion überhaupt.

π und e sind reelle Zahlen, genauer: irrationale Zahlen, deren Dezimalbruchdarstellung unendlich und nicht-periodisch ist. Näherungswerte sind $\pi \approx 3{,}14159$ und $e \approx 2{,}71828183$

In dieser Veranstaltung geht es um eine bemerkenswerte Beziehung zwischen den fünf Zahlen, „die schönste Formel der Mathematik", wie viele Mathematiker finden:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Auf den ersten Blick muss diese Formel erstaunen: eine Potenz einer positiven reellen Zahl soll negativ sein!?! Die Wachstumszahl e ist eine positive reelle Zahl; potenziert man sie mit einer beliebigen reellen Zahl, z.B. mit π, erhält man wieder eine positive Zahl. Dass $e^{i\pi}$ negativ ist, muss an der imaginären Einheit i liegen, dass der Wert gerade –1 ist, liegt an der Kreiszahl π. Die Aufklärung erfolgt im Kapitel Finale.

Diese Veranstaltung soll den Weg zum Verständnis der geheimnisvollen Formel beschreiben. Dieser Weg führt durch zentrale Gebiete der Mathematik: Geometrie einschließlich Trigonometrie, Arithmetik und Algebra sowie Analysis mit einem Blick in wissenschaftliches Rechnen. Nicht die Systematik dieser Gebiete steht im Vordergrund, sondern die fundamentalen Ideen, die zum Entstehen der Formel beitragen.

Die Kreiszahl π steht am Anfang der Betrachtung. Sie beschreibt in jedem Kreis sowohl das Verhältnis vom Umfang zum Durchmesser als auch das Verhältnis vom Flächeninhalt zum Radiusquadrat. Um ihren Wert aus bekannten geometrischen Gegebenheiten herzuleiten, haben die Griechen zum einen den Kreis durch regelmäßige Vielecke mit wachsender Eckenzahl und bekanntem Umfang (oder Flächeninhalt) approximiert. Zum andern haben sieversucht, mit Zirkel und Lineal eine Strecke zu konstruieren, die gleichlang zum halben Kreisumfang ist („Rektifizierung des Kreises"); äquivalent dazu ist, ein Quadrat zu konstruieren, das flächengleich zum Kreis ist („Quadratur des Kreises").

Die Zahl π als Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser hilft bei der Beschreibung beliebiger Winkel: Jeder Mittelpunktswinkel lässt sich durch das Verhältnis der zugehörigen Bogenlänge zum Radius, das sogenannte Bogenmaß, charakterisieren; der Vollwinkel hat demnach das Bogenmaß 2π, der gestreckte Winkel das Bogenmaß π. Diese Art der Winkelbeschreibung ist der erste Schlüssel zu der Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Will man aus gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen berechnen, bedient man sich der Trigonometrie. Wie man von der Definition von Sinus und Kosinus am rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe des Einheitskreises schließlich zur Sinus- und Kosinus-Funktion mit ihren Eigenschaften kommt, wird am Ende von Kapitel π beschreiben. Und wieder kommt π ins Spiel, diesmal als die Stelle, an der die Sinus-Funktion den Wert Null und die Kosinus-Funktion den Wert –1 annimmt. Das ist ein weiterer Schlüssel zur Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$.

In dieser Formel spiegeln sich zwei bedeutsame Begriffsentwicklungen wider. Das ist zum einen die Entwicklung des Zahlbegriffs von den natürlichen Zahlen (z.B. 0 und 1) über die reellen Zahlen (z.B. e und π) bis zu den komplexen Zahlen (z.B. i). Durch Störungen beim Rechnen und Messen („geht nicht") und den Drang sie zu beheben kommt es zu Erweiterungen des Zahlbegriffs. So führt schließlich der Wille, z.B.

alle quadratischen Gleichungen lösen zu können bzw. auch aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen zu können, zur Einführung der imaginären Einheit i und der imaginären Zahlen.

Mit den Zahlbereichserweiterungen einher geht zum anderen die Begriffserweiterung der Rechenoperationen. Kann man das Multiplizieren natürlicher Zahlen noch als fortgesetztes Addieren auffassen, so macht diese Deutung bei der Multiplikation zweier Brüche keinen Sinn mehr und schon gar nicht bei der Multiplikation zweier beliebiger negativer reeller Zahlen. Man muss die Rechenoperationen in den erweiterten Zahlbereichen neu definieren. Dabei soll das Rechnen mit den neuen Zahlen möglichst ausnahmslos nach denselben Regeln erfolgen wie mit den alten. Dieses Prinzip heißt Permanenzprinzip. Wendet man das Permanenzprinzip auf die reellen Zahlen unter Hinzunahme der imaginären Einheit an, erhält man die komplexen Zahlen. Diese Entwicklung wird im Kapitel i beschrieben.

In der Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ wird potenziert. Die Begriffsentwicklung des Potenzierens fängt mit dem fortgesetzten Multiplizieren des gleichen Faktors a an, gleich welche Sorte von Zahl a ist; der Exponent ist folglich eine natürliche Zahl, wobei es naheliegend ist, bei 1 anzufangen und $a^1 = a$ festzulegen. Aus dieser Begriffsbildung folgt unmittelbar das Potenzgesetz $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, wobei a eine beliebige Zahl und m und n natürliche Zahlen sind. Dieses Potenzgesetz legt die Erweiterung des Potenzbegriffs auf ganze Zahlen als Exponenten nahe. Mit dem Permanenzprinzip können wir auch Potenzen mit gebrochenen Exponenten erklären, indem wir einen Zusammenhang zum Wurzelziehen herstellen. Das geht nicht ohne Probleme bei negativen Zahlen als Basis. Klammert man allerdings negative Zahlen als Basis aus, kann man fortschreiten bis zu reellen Exponenten, also z.B. erklären, was man unter 2^π verstehen soll. Die Potenz 2^x ist dann für jeden reellen Exponenten x definiert. Wir können damit von der arithmetischen Betrachtung in die funktionale Sichtweise wechseln und z.B. $f(x) = 2^x$ als reelle Funktion, als sogenannte Exponentialfunktion, ansehen - ein folgenschwerer Schritt, wie wir noch sehen werden. Diese Entwicklung beschreiben wir am Beginn von Kapitel e.

Wir verfolgen die funktionale Sichtweise weiter und untersuchen eine spezielle Funktionenklasse, die Wachstumsfunktionen. Eine Wachstumsfunktion lässt sich als Exponentialfunktion $f(x) = q^x$ mit positiver reeller Basis q schreiben. Es gibt aber auch noch andere Möglichkeiten, sie zu charakterisieren, u.a. durch eine Potenzreihe. Das ist eine unendliche Reihe, in der jeder Summand die Form $a_n \cdot x^n$ hat, wobei der Koeffizient a_n eine reelle Zahl und der Exponent n der Potenz x^n eine natürliche Zahl ist. In der Potenzreihe kommen also nur Potenzen in ihrer ursprünglichen Definition mit natürlichen Zahlen als Exponenten vor. Eine besondere Funktion ist die sogenannte natürliche Wachstumsfunktion. Ihren Funktionswert an der Stelle 1 bezeichnen wir mit e. Wir können die irrationale Zahl e auf verschiedene Weisen berechnen. Die natürliche Wachstumsfunktion lässt sich also zum einen in der Form $f(x) = e^x$, zum anderen als Potenzreihe schreiben. Dies alles geschieht im Kapitel e.

Eine Funktion als Potenzreihe zu schreiben, das ist der letzte Schlüssel zum Verständnis der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$. Im Kapitel Finale wenden wir den Potenzreihen-Ansatz auf die Sinus- und die Kosinus-Funktion an, die wir in Kapitel π kennengelernt haben. Die Potenzreihen der beiden Funktionen haben einen frappierenden Zusammenhang zur Potenzreihe der e-Funktion. Ein Blick auf die Potenzen der imaginären Einheit i hilft ihn zu präzisieren. Es gilt $e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$ (Eulersche Formel). In der Eulerschen Formel $x = \pi$ setzen und das Wissen über π und die trigonometrischen Funktionen nutzen führt zu $e^{i\pi} + 1 = 0$. Das Geheimnis ist gelüftet.

Ein Rückblick öffnet noch eine ganz neue Sicht auf Potenzen: Die Potenzreihe der e-Funktion, in der ja nur Potenzen in ihrer ursprünglichen Definition mit natürlichen Zahlen als Exponenten vorkommen, kann man geradezu als neue Definition der Potenz e^z zur speziellen Basis e und zu einem beliebigen, sogar komplexen Exponenten z auffassen. Was aber ist 2^i oder i^i? Zu untersuchen, ob und wie man zur Definition einer Potenz w^z mit beliebiger komplexer Basis w und beliebigem komplexen Exponenten z kommt, hält noch einige Überraschungen bereit – vor allem, was das geschätzte Permanenzprinzip angeht.

Am Anfang und am Ende steht die faszinierende Zahl π. Dazwischen soll viel Wissenswertes, auch Historisches, über DIE KREISZAHL π, DIE WACHSTUMSZAHL e und DIE IMAGINÄRE EINHEIT i vermittelt werden. Diese Veranstaltung will aber vor allem Ihr Bild von Mathematik prägen als einer lebendigen Wissenschaft, die von überraschenden Einfällen vorangetrieben wird - bis auf den heutigen Tag.

Ihr Bild von Mathematik wird großen Einfluss auf die Art und Weise haben, mit der Sie als Mathematiklehrerin oder Mathematiklehrer Ihren Beruf ausüben werden.

Literatur

zu π

David Blatner, π – Magie einer Zahl, rororo Sachbuch 2001
Jean- Paul Delahaye "π – die Story", Birkhäuser 1999
Jörg Arndt & Christoph Haenel, π – Algorithmen, Computer, Arithmetik, Springer 2000
Das erste Büchlein ist mathematische Unterhaltungsliteratur vom Feinsten und dazu noch ein bibliophiles Kleinod. Die beiden anderen Bücher sind anspruchsvoller, das zweite ist unterhaltsam geschrieben mit schönen Illustrationen.

zu e (und ein bisschen π und i)
Eli Maor, Die Zahl e – Geschichte und Geschichten, Birkhäuser 1996
Was Delahaye für π, ist Maor für e, nur nicht so schön illustriert.

zu i
Joachim Engel, Komplexe Zahlen und ebene Geometrie, Oldenbourg 2009

zu π, i, e
Fridtjof Toennissen, Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Eine etwas andere Einführung in die Mathematik, Spektrum 2010
Anspruchsvoll, aber toll geschrieben. Spricht viele Themen dieser Vorlesung an.

Soweit nicht anders angegeben sind die Abbildungen des Skripts eigene Grafiken, erstellt mit Cinderella2, GeoGebra oder Word.

Kapitel π: π in der Geometrie

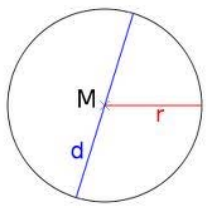
π ist der Name für eine Zahl, die (fast) jeder kennt. „Das hat was mit dem Kreis zu tun, mit dem Umfang und mit dem Flächeninhalt eines Kreises.“ Aber wie ist die Kreiszahl π definiert? Welchen Wert hat sie? Welche Gedanken sich die Menschen von alters her darüber gemacht haben, davon erfahren wir einiges in Kap. π.1 bis π.3.

Wenn sich ein Punkt um eine Mitte dreht, dann kann man die Drehung durch einen Winkel beschreiben. Der Punkt bewegt sich auf einem Kreis. Zu dem Drehwinkel gehört also ein Teil des Umfangs des Kreises. Mit der Zahl π kann man den Umfang, aber auch Teile des Umfangs eines Kreises berechnen. So entsteht der Zusammenhang mit dem Winkelbegriff. Die Disziplin, die sich an Stelle des Konstruierens ebener Figuren mit deren Berechnung beschäftigt, indem sie Strecken und Winkel zueinander in Beziehung setzt, ist die Trigonometrie. Mit der Rolle von π in der Trigonometrie befassen wir uns in Kap. π.4. Sie liefert einen wichtigen Schlüssel zu der Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$.

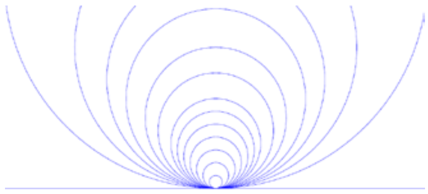
π.1 Die Kreiszahl π

Von alters her will man den Kreis vermessen. Messen heißt vergleichen: Längen misst man durch Vergleich mit einer Einheitsstrecke, Flächen durch Vergleich mit einem Einheitsquadrat. Messen orientiert sich also zunächst an Linien, die aus Strecken zusammengesetzt sind, und an geradlinig begrenzten Flächen. Wie soll man aber dann den Umfang und den Flächeninhalt eines Kreises messen?

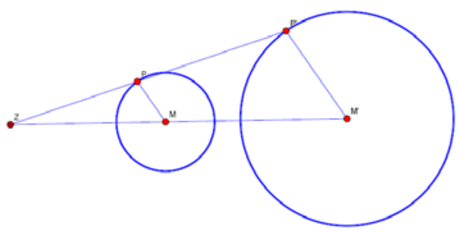
π.1.1 Umfang und Flächeninhalt des Kreises



Der Kreis ist unter Symmetriegesichtspunkten die perfekteste geschlossene ebene Figur: Jeder Durchmesser ist Symmetrieachse und jede Drehung um den Mittelpunkt bildet die Figur auf sich ab. Die zweite Eigenschaft ist gleichbedeutend damit, dass alle Punkte des Randes gleichweit vom Mittelpunkt entfernt sind. Diese Eigenschaft ist grundlegend für die Zirkel- oder Fadenkonstruktion des Kreises, auch „Gärtner-Konstruktion“ genannt.



Es gibt noch eine andere Möglichkeit einen Kreis herzustellen, die man beim Fahren mit dem Auto oder Fahrrad benutzt: Wenn man den Lenker nicht bewegt, fährt man im Kreis oder (im Grenzfall) geradeaus. Mathematisch heißt das, dass Kreis und Gerade die einzigen Kurven mit konstanter Krümmung sind. Je größer die Krümmung, desto kleiner der Kreis(radius).



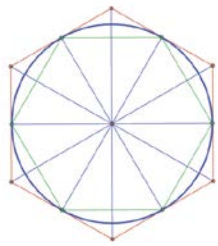
Und noch eine Eigenschaft ist so elementar wie wichtig: Alle Kreise sind zueinander ähnlich, d.h. sie sind vergrößerte oder verkleinerte Kopien voneinander. Abbildungsgeometrisch ausgedrückt: Sei werden durch eine zentrische Streckung aufeinander abgebildet – wie, das zeigt die Abbildung, in der man sofort die Strahlensatzfigur erkennt.
In der Ähnlichkeitslehre gilt: In allen ähnlichen Figuren ist das Verhältnis entsprechender Strecken gleich. Angewendet auf Kreise würde das heißen: In allen Kreisen ist das Verhältnis von Umfang zu Radius (bzw. Durchmesser) gleich.

Der Haken an dieser Formulierung ist, dass wir intuitiv der Kreislinie eine Länge zuordnen, ohne zu wissen, wie wir sie denn messen sollen; denn Messen von Längen orientiert sich an Streckenmessung und setzt Geradlinigkeit voraus.

Eine auch im Alltag verwendete intuitive Idee ist, den Kreis auf einer Geraden abrollen zu lassen und die Strecke zu messen, bis derselbe Punkt wieder auf der Geraden ankommt.
Eine andere Idee ist, um einen Körper mit

kreisförmigem Querschnitt eine Schnur zu binden und sie anschließend gerade zu ziehen. Die geometrische Präzisierung dieser praktischen Ideen führte im antiken Griechenland zu der Frage: Wie kann man zu einem gegebenen Kreis mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten eine Strecke so konstruieren, dass sie gleichlang zum Umfang des Kreises ist? Ein solches Verfahren nennt man Rektifizieren (lat. gerade machen) des Kreises. Die Berechnung des Kreisumfangs läuft dann auf die Frage hinaus: Wie oft passt der Kreisdurchmesser in die durch Rektifizierung entstandene Strecke? (Dass die Beantwortung unter Umständen schwierig sein kann, ahnt man, wenn man sie mit der Frage vergleicht, wie oft die Seite eines Quadrats in seine Diagonale passt.)

Gelingt die Rektifizierung des Kreises, dann ist auch ein anderes klassisches Problem der Antike gelöst: die Quadratur des Kreises: Geometrisch bedeutet das, zu einem Kreis mit Zirkel und Lineal in endlich vielen Schritten ein flächengleiches Quadrat zu konstruieren. Genaueres erfahren wir in Kapitel π.5. Hier nur so viel: „Quadratur des Kreises" ist heutzutage ein Synonym für ein unlösbares Problem!?!



Messen von Längen orientiert sich an Streckenmessung und setzt Geradlinigkeit voraus. Es gibt zum Glück geradlinig begrenzte geschlossene ebene Figuren, die fast genau so perfekt sind wie der Kreis: regelmäßige n-Ecke. Alle n Eckpunkte eines regelmäßigen n-Ecks liegen auf einem Kreis, genannt Umkreis. Alle n Seiten sind gleichlang. Ein regelmäßiges n-Eck hat n Symmetrieachsen; es gibt n Drehungen um den Mittelpunkt, die die Figur auf sich abbilden. Ein regelmäßiges n-Eck besteht aus n kongruenten gleichschenkligen Dreiecken, deren Spitze der Mittelpunkt und deren Basis die Seiten des regelmäßigen n-Ecks sind. Ein solches Dreieck heißt Bestimmungsdreieck des regelmäßigen n-Ecks. Der Winkel an der Spitze des Bestimmungsdreiecks beträgt $\frac{360°}{n}$. Die Summe der Innenwinkel des regelmäßigen n-Ecks beträgt $(n-2) \cdot 180°$.

Da für ein festes n die Winkel des Bestimmungsdreiecks festliegen, sind die Bestimmungsdreiecke verschieden großer regelmäßiger n-Ecke und folglich auch die regelmäßigen n-Ecke selber zueinander ähnlich. Um ein regelmäßiges n-Eck eindeutig festzulegen, braucht man neben der Angabe der Eckenzahl n noch eine Längenangabe, z.B. die Seitenlänge oder den Durchmesser des Umkreises.

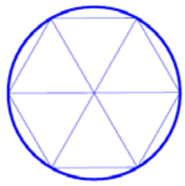
Ein regelmäßiges n-Eck besitzt nicht nur einen Umkreis, sondern auch einen Inkreis, der die n Seiten berührt. Umgekehrt besitzt jeder Kreis ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes regelmäßiges n-Eck. Der Umfang bzw. der Flächeninhalt des einbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks ist immer kleiner als der Umfang bzw. der Flächeninhalt des Kreises und dieser ist wiederum kleiner als der Umfang bzw. der Flächeninhalt des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks.

Diese Verwandtschaft zwischen Kreis und regelmäßigem n-Eck werden wir im Folgenden häufiger betrachten, vor allem unter dem Aspekt der Approximation: Je größer die Eckenzahl n, desto geringer der Unterschied zwischen Kreis und regelmäßigem n-Eck. Genauer: Der Umfang des einbeschriebenen und des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks schachtelt mit wachsendem n eine bestimmte Länge ein; diese Länge definieren wir als den **Kreisumfang**. Der Flächeninhalt des einbeschriebenen und des umbeschriebenen regelmäßigen n-Ecks schachtelt mit wachsendem n einen bestimmten Flächeninhalt ein; diesen definieren wir als den **Flächeninhalt des Kreises**.

π.1.2 Geometrische Definitionen von π

Die Bedeutung der Kreiszahl π beruht auf der zentralen Aussage, dass alle Kreise zueinander ähnlich sind. **Die Zahl π ist eine Verhältniszahl** bzw. ein Proportionalitätsfaktor. Es gibt zwei mögliche Definitionen, die zueinander äquivalent sind – was man nicht auf den ersten Blick erkennt.

Definition über den Kreisumfang:
In allen ähnlichen Figuren ist das Verhältnis entsprechender Strecken gleich. Das gilt zunächst nur für geradlinig begrenzte Figuren. Durch Approximation des Kreises durch regelmäßige n-Ecke übertragen wir die Aussage auf den Kreis und darin den Umfang und den Durchmesser und erhalten so:

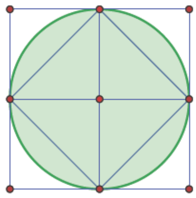


In allen Kreisen ist das Verhältnis des Kreisumfangs zum Kreisdurchmesser gleich oder - was dasselbe ist - ist der Kreisumfang proportional zum Durchmesser.
Den Proportionalitätsfaktor bezeichnen wir mit π_u , d.h. es gilt $u = \pi_u \cdot d$.

Wie groß ist π_u ungefähr?
Durch Vergleich mit dem ein- und dem umbeschriebenen Sechseck ergibt sich:
$3 < \pi_u < 2\sqrt{3}$.

Definition über die Kreisfläche:
In der Ähnlichkeitslehre zeigt man auch: Die Flächeninhalte ähnlicher Figuren verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Strecken. Durch Approximation des Kreises durch regelmäßige n-Ecke übertragen wir die Aussage auf den Kreis und können sie wie folgt umformulieren:

In allen Kreisen ist das Verhältnis der Kreisfläche zur Fläche des Radiusquadrats gleich oder - was dasselbe ist - wächst die Kreisfläche mit dem Quadrat des Radius bzw. ist die Kreisfläche proportional zum Radiusquadrat.
Den Proportionalitätsfaktor bezeichnen wir mit π_A, d.h. es gilt $A = \pi_A \cdot r^2$.

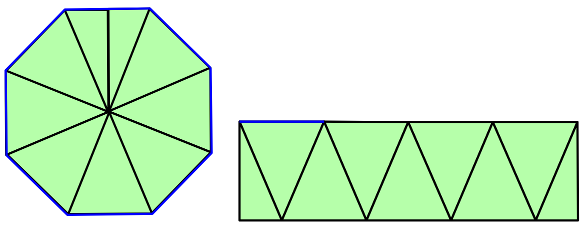


Wie groß ist π_A ungefähr?
Durch Vergleich mit dem einbeschriebenen und dem umbeschriebenen Quadrat ergibt sich: $2 < \pi_A < 4$.
Das einbeschriebene Zwölfeck hat die Fläche $3r^2$ (s. Übung). Also gilt: $3 < \pi_A$.

Dass beide Proportionalitätsfaktoren gleich sind, ist nicht selbstverständlich. Beim regelmäßigen Sechseck wächst beispielsweise der Umfang proportional zum Durchmesser des Umkreises mit dem Proportionalitätsfaktor 3, die Fläche proportional zum Radiusquadrat des Umkreises mit dem Faktor $\frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}$.

Der folgende Satz ist also nicht trivial.

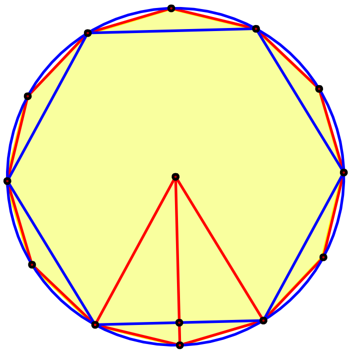
Satz: Es gilt $\pi_u = \pi_A$.
D.h. für Kreisumfang u und Kreisfläche A gilt $u = \pi \cdot d$ und $A = \pi \cdot r^2$. Man nennt π kurz die Kreiszahl.



Die Beweisideen nach Archimedes, wir nennen sie „Kuchen"-Beweis und „Schäl"-Beweis (s. Übung), benutzen den Grundgedanken der Approximation. Der „Kuchen"-Beweis benutzt die Tatsache, dass jedes regelmäßige n-Eck die gleiche Fläche hat wie das Rechteck, dessen eine Seite so lang wie der halbe Umfang und dessen andere Seite so lang wie die Höhe im Bestimmungsdreieck des n-Ecks ist. Mit wachsendem n wird der Unterschied zwischen dem Umfang bzw. dem Flächeninhalt des Kreises und des regelmäßigen n-Ecks immer kleiner, so dass auch für den Kreis gilt: $A = \frac{u}{2} \cdot r$, also $\pi_A \cdot r^2 = \frac{\pi_u \cdot d}{2} \cdot r$. Hieraus folgt $\pi_A = \pi_u$.

Diese Argumentation wäre Archimedes zu unpräzise gewesen. Da er den Grenzwertbegriff noch nicht zur Verfügung hatte, führte er in der Regel einen Widerspruchsbeweis. Der könnte so gegangen sein.

Angenommen, die Kreisfläche sei größer als die Fläche des Rechtecks, gebildet aus dem halben Umfang und dem Radius des Kreises; dann ist sie um eine gewisse positive Zahl a größer.



Betrachte ein einbeschriebenes regelmäßiges Sechseck und die Fläche zwischen Kreis und Sechseck; sie besteht aus sechs gleich großen Kreissegmenten. Ihre Gesamtfläche sei b; dann ist die Kreisfläche um b größer als die Fläche des Sechsecks. Verdoppelt man die Eckenzahl, so ist jedes neue Kreissegment weniger als halb so groß wie das vorherige (warum?); d.h. mit jeder Verdopplung der Eckenzahl wird die Fläche zwischen Kreis und Vieleck um mehr als die Hälfte kleiner. Verdopple nun die Eckenzahl so oft, bis diese Fläche kleiner als a wird; das geht, weil man durch fortgesetztes Halbieren einer positiven Zahl schließlich unter jede vorgegebene positive Schranke kommt*. Die Fläche dieses Vielecks ist demnach um weniger als a kleiner als die Kreisfläche.
Dieses Vieleck hat die gleiche Fläche wie das Rechteck, dessen eine Seite so lang wie der halbe Umfang des Vielecks und dessen andere Seite so lang wie die Höhe im Bestimmungsdreieck des Vielecks ist, und damit eine kleinere Länge und Breite, also eine kleinere Fläche als das Rechteck, gebildet aus dem halben Kreisumfang und dem Radius. Danach müsste die Fläche dieses Vielecks um mehr als a kleiner als die Kreisfläche sein - Widerspruch.

Angenommen, die Kreisfläche sei kleiner als die Fläche des Rechtecks, gebildet aus dem halben Umfang und dem Radius des Kreises; dann ist sie um eine gewisse positive Zahl a kleiner.
Betrachte ein umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck und die Fläche zwischen Vieleck und Kreis (Fertige eine Skizze!). Verdopple nun die Eckenzahl so oft, so wird diese Fläche weniger als halb so groß (warum?); d.h. mit jeder Verdopplung der Eckenzahl wird die Fläche zwischen Vieleck und Kreis um mehr als die Hälfte kleiner. Verdopple nun die Eckenzahl so oft, bis diese Fläche kleiner als a wird. Die Fläche dieses Vielecks ist demnach um weniger als a größer als die Kreisfläche.
Dieses Vieleck hat die gleiche Fläche wie das Rechteck, dessen eine Seite so lang wie der halbe Umfang des Vielecks und dessen andere Seite so lang wie der Kreisradius ist; und damit eine größere Fläche als das Rechteck, gebildet aus dem halben Kreisumfang und dem Radius (warum?). Danach müsste die Fläche dieses Vielecks um mehr als a größer als die Kreisfläche sein - Widerspruch.

Wir haben den Beweis ohne jede Formel geführt - ganz im Stil der Argumentation des Archimedes (wenn auch nicht in allen Einzelheiten übereinstimmend).

Das Symbol *π*

Der griechische Buchstabe *π* wurde keineswegs von den Griechen eingeführt. Nach heutiger Kenntnis taucht er zum ersten Mal neben anderen Abkürzungen im 17 Jahrhundert auf, wohl in Anklang an die griechischen Wörter περιφέρεια – *peripheria* („Randbereich“) oder περίμετρος – *perimetros* („Umfang“). Der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707 – 1783) entschied sich nach anderen Symbolen für die Kreiszahl schließlich für *π* und benutzte diese Kennzeichnung in seinem zweibändigen Standardwerk Introductio in Analysin Infinitorum von 1748. Wegen seiner Berühmtheit – der Eulers und des Werks – setzte sich von da an *π* immer mehr als Symbol für die Kreiszahl durch.

* Das ist ein Spezialfall der Eigenschaft reeller Zahlen, die man als archimedische Eigenschaft bezeichnet, aber schon vor Archimedes benutzt wurde: Zu zwei positiven reellen Zahlen $a < b$ gibt es immer eine natürliche Zahl so dass der n-te Teil von b kleiner als a ist.

π.1.3 Der Wert von π - geschichtlich betrachtet

Wie die schriftlichen Überlieferungen bezeugen, spielt Kreisberechnung seit alters her in allen Kulturen eine Rolle, wenn es um Landvermessung oder um astronomische Beobachtungen geht. In der „vor-griechischen“ Zeit wurde der Wert von π – als Verhältnis von Kreisumfang zu Durchmesser bzw. von Kreisfläche zu Radiusquadrat – **empirisch durch Nachmessen** (vgl. Kap. π.1.1) ermittelt.

Aus altbabylonischer Zeit (ca. 1900 - 1650 v.Chr.) stammt eine 1936 entdeckte Keilschrift-Tafel aus Susa. Darin steht, dass der Umfang eines einbeschriebenen Sechsecks das 57‘36‘‘-fache des Kreisumfangs ist. (Die Babylonier schrieben Zahlen im Sechziger-System: $0°57'36'' = \frac{57}{60} + \frac{36}{60^2}$.)
Demnach wäre in uns geläufiger Zahldarstellung $\pi = 3\frac{1}{8} = 3{,}125$.

In Ägypten wurde um 1850 v.Chr. ein Text mit mathematischen Aufgaben verfasst, der (wegen seines heutigen Aufenthaltsorts sogenannte) Moskauer Papyrus. Darin ist eine Formel für die Oberfläche eines Korbes angegeben. Fasst man den Korb als Halbkugel auf, dann würde (in unserer heutigen Formelsprache) gelten $\mathrm{O} = 2 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^2 \cdot \mathrm{d}^2$ mit d als Durchmesser der Kugel. Verglichen mit der korrekten Formel $\mathrm{O} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \mathrm{d}^2$, wäre $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} = 3{,}160 \ldots$ (Die Ägypter rechneten mit Stammbrüchen!)

Der Papyrus Rhind wurde um 1650 v.Chr. von dem Schreiber Ahmes verfasst und ist eine Abschrift eines älteren Dokuments. Darin steht: „Nimm ein Neuntel vom Durchmesser weg und konstruiere ein Quadrat aus dem Rest; das hat die gleiche Fläche wie der Kreis.“ Gemäß dieser „Quadratur des Kreises“ ergibt sich derselbe Wert für π wie oben, nämlich $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}160 \ldots$

In der Bibel heißt es einem Text, der um 550 v. Chr. entstand, über das Innere von Salomons Tempel: *„Und er [der Gießer] machte ein gegossen Meer [Kessel] zehn Ellen weit von einem Rand an den anderen rund herum, und fünf Ellen hoch; und eine Schnur dreißig Ellen war das Maß ringsherum.“* (1 Könige 7:23)
Demnach wäre $\pi = 3$.

Mit den Griechen setzt in der klassischen Antike (500 v.Chr. – 200 n.Chr.) eine neue Denkweise ein. Der Wert von π soll nicht mehr durch empirisches Messen ermittelt werden, sondern durch **Herleiten aus bekannten geometrischen Gegebenheiten**: Messen heißt Vergleichen und Längenmessung ist zunächst einmal verbunden mit Streckenvergleich. Streckenzügen kann deshalb eine Länge zugeordnet werden und entsprechend geradlinig begrenzten Figuren ein Flächeninhalt. Wie in Kap. π.1 geschildert, gelangt man durch Approximation zum Umfang (und zum Flächeninhalt) des Kreises. Die berühmteste Approximation dieser Art an π ist die des Archimedes von Syrakus (287 – 212 v.Chr.). Er kommt auf diese Weise zu der Abschätzung $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, in Dezimalschreibweise $3{,}1408 \ldots < \pi < 3{,}1429 \ldots$.

Diese Methode der geometrischen Approximation (vgl. Kap. π.4) hat viele Nachfolger gefunden. Der berühmte Astronom Ptolemäos (ca. 100 – 170 n.Chr.) rechnete (im Sechzigersystem) mit $\pi = 3°8'30'' = 3{,}14167 \ldots$. Dieser Wert weicht um weniger als 7,4 Tausendstel eines Prozents vom richtigen Wert ab.

Die griechische Tradition wurde im ersten Jahrtausend in den Kulturen Chinas, Indiens und Arabiens fortgeführt, nicht aber in Europa infolge der Turbulenzen der Völkerwanderung und der christlich-fundamentalistischen Abgrenzung zu den „heidnischen“ Kulturen. Im China des 5. Jahrhunderts approximierten Tsu Ch‘ung Chi und sein Sohn Tsu Keng Chi π nach der archimedischen Methode mithilfe eines 24 576-Ecks ($24\,576 = 3 \cdot 2^{13}$). Sie erhielten mit $\pi \approx \frac{355}{113} = 3{,}14159 \ldots$ einen Wert, der lediglich um 8,5 Millionstel eines Prozents vom richtigen Wert abweicht, eine Leistung, die mehr als 1000 Jahre unerreicht bleiben sollte.

Eine viel schlechtere Annäherung, aber ein wegen seiner Einfachheit im Orient häufig benutzter Wert war $\pi = \sqrt{10} \approx 3{,}162 \ldots$. Er tauchte in Indien sowie in China auf und wird auch „Hindu-Wert“ genannt.

Die islamische Kultur nahm die wissenschaftlichen Erkenntnisse des antiken Griechenland ebenso auf wie die Chinas und Indiens. Insbesondere übernahm sie die aus Indien stammende Zahlenschreibweise mit der Null und dem Dezimalkomma. Auf dem Weg der Kolonialisierung Nordafrikas und Spaniens gelangt dieses Wissen Ende des ersten Jahrtausends nach Europa. Die kriegerischen Auseinandersetzungen zwischen christlichen und islamischen Machthabern auf der iberischen Halbinsel und im Nahen Osten einerseits und die trotz religiöser Konflikte nie versiegende Handelstätigkeit europäischer Kaufleute andererseits führten gegen Ende des Mittelalters dazu, dass die Europäer wieder Zugang zu der unterbrochenen, inzwischen weiter entwickelten Tradition fanden („Renaissance").

Bei der Bestimmung des Wertes von π wurde nun auch in Europa die archimedische Methode angewandt oder variiert (vgl. Kap. π.4). Nachdem er sein Leben lang gerechnet hatte, bestimmte Ludolph van Ceulen (1539 – 1610) kurz vor seinem Tod π auf 34 Stellen genau. In Würdigung dieser Arbeit wurde π im deutschsprachigen Raum auch „Ludolphsche Zahl" genannt. Eine gewisse Tragik dieser Lebensleistung liegt darin, dass der Fortschritt der Mathematik inzwischen zu effizienteren Methoden als der geometrischen Approximation von π geführt hatte.

„Die dreihundert Jahre zwischen Ende der Renaissance und Ende des viktorianischen Zeitalters [ca. 1600 – 1900] bilden einen außerordentlichen Abschnitt in der Geschichte der Mathematik. Als hätte ein Samen nach zweitausendjähriger Ruhe in Westeuropa schließlich das geeignete Klima gefunden um zu keimen, zu wachsen und sich schließlich – im 19. Jahrhundert – zu prächtiger Blüte zu entfalten. Einige der faszinierendsten und klügsten Mathematiker des zweiten Jahrtausends lebten und arbeiteten in diesem Zeitraum, wobei jeder dem Nächsten den Boden bereitete, in einer Reihe von Schritten, die die Mathematik und das wissenschaftliche Denken revolutionierten. Und wie sich die Mathematik entwickelte, so entwickelte sich die Suche nach und das Studium von π." (D. Blatner, übersetzt aus dem Original von hdr)

Zentraler Punkt war die zunehmende Beherrschung des Unendlichen (unendliche Summen, unendliche Produkte, unendliche Brüche) durch die **Entwicklung der Analysis**, die im 17. Jahrhundert begann und im 19. Jahrhundert zur Blüte geführt wurde. Vor allem durch die Entwicklung des Arcustangens, der Umkehrfunktion des Tangens, in Potenzreihen (vgl. Kap. e.3.2) ergaben sich viele unendliche Reihen, mit deren Hilfe man π effektiv berechnen konnte. Es begann die Jagd nach möglichst vielen Nachkommastellen (NKS): 1706 100 NKS, 1719 127 NKS, 1794 140 NKS, 1855 500 NKS, 1873 707 NKS; allerdings mit einem Fehler an der 527. Stelle, der erst 1945 entdeckt und korrigiert wurde. Der Rekord von 1873 nahm mehrere Jahre Rechenarbeit in Anspruch, seine Korrektur 1945 immerhin noch ein ganzes Jahr.

Im **Computerzeitalter** haben sich die Rechenzeiten radikal geändert: 1958 erforderte der Rekord von 1873 noch 40 Sekunden Rechenzeit. 1973 brauchte man für 1 Million Stellen einen Tag. 2016 lag der Rekord bei über 22 Billionen Stellen und erforderte eine Rechenzeit von 105 Tagen (Quelle: Wikipedia).

Heute steht die Rekordjagd im Zeichen des Austestens neuer Computer und der Entwicklung neuer Methoden des wissenschaftlichen Rechnens.

π.2 Approximation von π mit Hilfe von regelmäßigen Vielecken

Wir beschreiben in diesem Abschnitt drei verschiedene Wege (in der Übung noch einen weiteren), sich dem Wert von π zu nähern, indem man statt des Kreises zunächst regelmäßige n-Ecke betrachtet und deren Umfang oder Flächeninhalt mit elementargeometrischen Mitteln berechnet. Anschließend wird die Eckenzahl schrittweise verdoppelt und durch einfache Grenzbetrachtungen (die lange vor der Zeit der Analysis schon angestellt wurden) der Wert von π bestimmt.

Die ersten beiden Wege von Archimedes und von Descartes, die über den Umfang gehen, erläutern wir mit Hilfe eines von alters her bekannten arithmetischen Verfahrens, der Mittelwertbildung. Der dritte Weg von Vieta geht über den Flächeninhalt. Er führt zu einer faszinierenden Formel für π, die nur aus Wurzeln und der Zahl 2 besteht.

π.2.1 Historische Mittelwertbildung

Die Mittelwertbildung war den alten Griechen bestens vertraut*. Archytas von Tarent (geboren zwischen 435 und 410 v. Chr.; gestorben zwischen 355 und 350 v. Chr.) gehörte der von Pythagoras (geboren um 570 v. Chr., gestorben nach 510 v. Chr.) gegründeten Schule der Pythagoreer an. In einem der vier von ihm erhaltenen Fragmente finden wir die Definitionen des arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittels, in Worten umschrieben, ohne die heutige Symbolschreibweise.

Es gibt aber drei mittlere Proportionalen in der Musik: erstens die arithmetische, zweitens die geometrische, drittens die reziproke, die man die harmonische nennt.
Die arithmetische, wenn die drei Zahlterme in der Proportion folgende Differenz aufweisen: um wie viel der erste den zweiten übertrifft, um so viel übertrifft der zweite den dritten.
Die geometrische, wenn der erste Term sich zum zweiten wie der zweite zum dritten verhält.
Die reziproke Proportion (die man die harmonische nennt), wenn sich die Terme so verhalten: um den wievielten Teil der eigenen Größe der erste Term den zweiten übertrifft, um diesen Teil des dritten übertrifft der Mittelterm den dritten.

Wir übersetzen die Definitionen in unsere Symbolsprache. Für beliebige positive Zahlen x und y bezeichnen wir mit aM(x,y) oder kurz aM das arithmetische Mittel, mit gM(x,y), kurz gM, das geometrische Mittel und mit hM(x,y), kurz hM, das harmonische Mittel der beiden Zahlen.

Beim arithmetischen Mittel übertrifft die Zahl y den Mittelwert aM um so viel wie aM die Zahl x, also $\mathrm{y} - \mathrm{aM} = \mathrm{aM} - \mathrm{x}$. Umgeformt ergibt das die geläufige Definition des arithmetischen Mittels

$$\mathrm{aM}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \tfrac{\mathrm{x}+\mathrm{y}}{2}.$$

Beim geometrischen Mittel verhält sich y zu gM wie gM zu x, also $\mathrm{y}:\mathrm{gM} = \mathrm{gM}:\mathrm{x}$. Umgeformt ergibt sich die geläufige Form des geometrischen Mittels

$$\mathrm{gM}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \sqrt{\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}}.$$

Die geometrische Interpretation ist: Suche zu einem Rechteck mit den Seitenlängen x und y ein flächengleiches Quadrat; seine Seitenlänge beträgt dann $\sqrt{\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}}$.

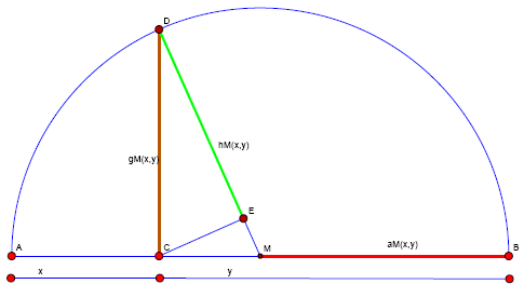
Die Übersetzung des harmonischen Mittels ist etwas komplizierter. Der erste Term y übertrifft den zweiten Term hM um y – hM; dann ist (y – hM):y der *Teil der eigenen Größe, um den der erste Term den zweiten übertrifft*. Die Mittelwerte liegen immer zwischen den beiden Zahlen y und x. Der Mittelterm hM übertrifft den dritten Term x um (hM – x); dann ist (hM – x):x der *Teil des dritten, um den der Mittelterm den dritten übertrifft*. Beide Verhältnisse sind gleich: $(\mathrm{y} - \mathrm{hM}):\mathrm{y} = (\mathrm{hM} - \mathrm{x}):\mathrm{x}$.Durch Umformung ergibt sich hieraus für das harmonische Mittel

$$\mathrm{hM}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{\frac{\frac{1}{\mathrm{x}}+\frac{1}{\mathrm{y}}}{2}} = \frac{2\cdot\mathrm{x}\cdot\mathrm{y}}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$$

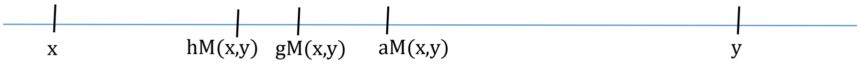
* Horst Hischer gibt in seinem Artikel „Viertausend Jahre Mittelwertbildung – Eine fundamentale Idee der Mathematik und didaktische Implikationen“ (math.did. 25 (2002), Bd.2 S. 3 – 51) einen hervorragenden Überblick.

Offensichtlich gilt: $aM(x,y) \cdot hM(x,y) = (gM(x,y))^2$.

Arithmetisch verifiziert man leicht:
$(gM(x,y))^2 \leq (aM(x,y))^2$, folglich $gM(x,y) \leq aM(x,y)$.
Also muss $hM(x,y) \geq aM(x,y)$ sein, wobei das Gleichheitszeichen nur für $x=y$ gilt.
Einen schönen geometrischen Beweis für die beiden Ungleichungen liefert die nebenstehende Beweisfigur mit Hilfe des Katheten- und des Höhensatzes.



Die Ungleichungskette $\min(x,y) \leq hM(x,y) \leq gM(x,y) \leq aM(x,y) \leq \max(x,y)$ wird uns wertvolle Dienste bei den Approximationen von Archimedes und Descartes leisten. Sie lässt sich am Zahlenstrahl wie folgt veranschaulichen (mit $\min(x,y) = x$, $\max(x,y) = y$).



Eine praktische Hilfe für das Rechnen mit Mittelwerten ist auch folgende Eigenschaft. Für eine beliebige positive reelle Konstante c gilt:

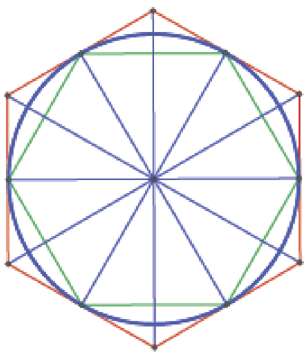
$aM(c \cdot x, c \cdot y) = c \cdot aM(x,y)$ $\quad gM(c \cdot x, c \cdot y) = c \cdot gM(x,y)$ $\quad hM(c \cdot x, c \cdot y) = c \cdot hM(x,y)$

π.2.2 Approximation über den Umfang nach Archimedes

Archimedes, (287–212 v.Chr.) in Syrakus geboren, war dort (mit Ausnahme weniger Unterbrechungen) als Mathematiker, Ingenieur und technischer Berater tätig. Ihm werden bedeutende mathematische und physikalische Erkenntnisse zugeschrieben. So entdeckte er die Hebelgesetze sowie das nach ihm benannte „archimedische Prinzip“ (Auftriebsprinzip). Bei der Entdeckung lag er angeblich in der Badewanne und war über seine Erkenntnis so erfreut, dass er auf die Straße lief und das berühmte „Heureka“ („ich hab‘s“) gerufen haben soll. Die Kunst des Problemlösens nennt man daher Heuristik.
Im Bereich der Mathematik benutzte Archimedes mit seinen Approximationsmethoden bereits infinitesimales Denken, das erst ca. 2000 Jahre später durch die Erfindung der Differential- und Integralrechnung von Newton und Leibniz präzisiert wurde.

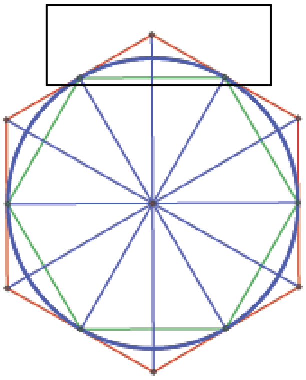

(Bildquelle: wikipedia)

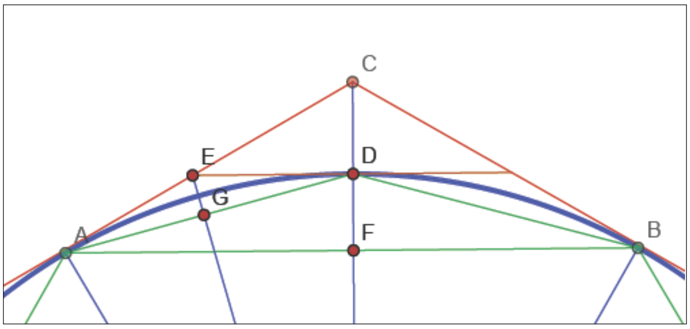
Idee: Beginne mit einem dem Einheitskreis (Kreis mit dem Radius 1) einbeschriebenen und einem ihm umbeschriebenen regelmäßigen Sechseck und berechne jeweils den Umfang u_1 und U_1.
Es gilt $u_1 = 6$ und $U_1 = 4 \cdot \sqrt{3}$.
Konstruiere (durch fortgesetztes Halbieren der Mittelpunktswinkel) in jedem Schritt ein einbeschriebenes und umbeschriebenes regelmäßiges Vieleck mit doppelter Eckenzahl. Auf diese Weise entstehen also $6 \cdot 2^{n-1}$-Ecke mit $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Berechne jeweils die Umfänge u_n und U_n.



Offensichtlich bilden die Umfänge u_n der einbeschriebenen Vielecke eine wachsende Zahlenfolge, die Umfänge U_n der umbeschriebenen Vielecke eine fallende Zahlenfolge und der Kreisumfang π liegt dazwischen, kurz: $u_n < u_{n+1} < 2\pi < U_{n+1} < U_n$. Die Differenz $U_n - u_n$ geht mit wachsendem n gegen Null. In der Sprache der Analysis: Die Folge der Intervalle $[u_n, U_n]$ bildet eine Intervallschachtelung, die die Zahl 2π approximiert.

Durchführung der Beweisidee:





Konstruktion des Bildausschnitts
Beginne mit dem Kreisbogen und einer Seite AB des regelmäßigen **einbeschriebenen a-Ecks** mit der Seitenlänge x_n. Deute in A und B die Radien an.
Konstruiere den Mittelpunkt F von AB. Die Senkrechte zu AB durch F geht durch den Kreismittelpunkt und durch den Kreispunkt D.
AD (und BD) sind Seiten des regelmäßigen **einbeschriebenen 2a-Ecks** mit der Seitenlänge x_{n+1}.
Konstruiere die Senkrechten auf die Kreisradien in A und in B. Sie sind Kreistangenten und treffen sich im Eckpunkt C des regelmäßigen **umbeschriebenen a-Ecks**. Die Strecke AC ist halb so lang wie die Seitenlänge y_n des umbeschriebenen a-Ecks. Der Eckpunkt C liegt auf dem verlängerten Kreisradius durch D.
Konstruiere zu FD die Senkrechte in D. Sie ist Kreistangente und trifft die Strecke AC im Punkt E. ED und AE sind gleichlang (Tangentenabschnitte), und zwar halb so lang wie die Seitenlänge y_{n+1} des **umbeschriebenen 2a-Ecks**.
Konstruiere den Mittelpunkt G von AD. Die Senkrechte zu AD durch G geht durch den Kreismittelpunkt und durch den Eckpunkt E des umbeschriebenen 2a-Ecks.

Wir vergrößern die Situation in dem rechteckigen Ausschnitt und führen den nächsten Approximationsschritt durch. Wir betrachten den Approximationsschritt gleich in der Verallgemeinerung:
Die Ausgangssituation besteht aus einem einbeschriebenen und einem umbeschriebenen $6 \cdot 2^{n-1}$-Eck. Wir kürzen ab $a = 6 \cdot 2^{n-1}$. Nach dem Approximationsschritt entstehen ein einbeschriebenes und ein umbeschriebenes 2a-Eck ($2a = 6 \cdot 2^n$).

einbeschriebenes a-Eck:	Seitenlänge x_n	Umfang $u_n = a \cdot x_n$
umbeschriebenes a-Eck:	Seitenlänge y_n	Umfang $U_n = a \cdot y_n$
einbeschriebenes 2a-Eck:	Seitenlänge x_{n+1}	Umfang $u_{n+1} = 2a \cdot x_{n+1}$
umbeschriebenes 2a-Eck:	Seitenlänge y_{n+1}	Umfang $U_{n+1} = 2a \cdot y_{n+1}$

Aus der Figur entnehmen wir:

einbeschriebenes a-Eck:	Seitenlänge $x_n = AB = 2 \cdot AF$
umbeschriebenes a-Eck:	Seitenlänge $y_n = 2 \cdot AC$
einbeschriebenes 2a-Eck:	Seitenlänge $x_{n+1} = AD = 2 \cdot DG$
umbeschriebenes 2a-Eck:	Seitenlänge $y_{n+1} = 2 \cdot ED = 2 \cdot EA$

Wir zeigen: (1) $U_{n+1} = hM(u_n, U_n)$ (2) $u_{n+1} = gM(u_n, U_{n+1})$.

Beweis von (1) $U_{n+1} = hM(u_n, U_n)$

In dem vergrößerten Ausschnitt erkennt man die Strahlensatzfigur AECDF. (Warum ist ED∥AF?) Demnach gilt:

$$\frac{ED}{AF} = \frac{EC}{AC} = \frac{AC - AE}{AC} = 1 - \frac{AE}{AC} \qquad \text{also:} \qquad \frac{y_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{y_{n+1}}{y_n}$$

Nach y_{n+1} aufgelöst, ergibt sich $2 \cdot y_{n+1} = hM(x_n, y_n)$

Hieraus folgt: $hM(u_n, U_n) = hM(a \cdot x_n, a \cdot y_n) = a \cdot hM(x_n, y_n) = 2a \cdot y_{n+1} = U_{n+1}$

Beweis von (2) $u_{n+1} = gM(u_n, U_{n+1})$

In dem vergrößerten Ausschnitt erkennt man, dass die Dreiecke AFD und DGE ähnlich sind. (Warum?) Demnach gilt:

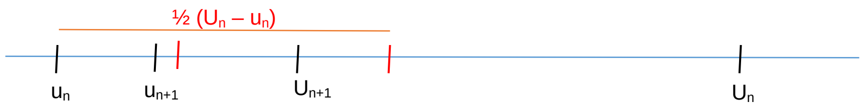
$$\frac{AD}{AF} = \frac{DE}{DG} \qquad \text{also:} \qquad \frac{x_{n+1}}{\frac{1}{2}x_n} = \frac{\frac{1}{2}y_{n+1}}{\frac{1}{2}x_{n+1}}$$

Daraus ergibt sich $(2\,x_{n+1})^2 = x_n \cdot (2\,y_{n+1})$ also $2\,x_{n+1} = gM(x_n, 2\,y_{n+1})$

Hieraus folgt:

$$gM(u_n, U_{n+1}) = gM(a \cdot x_n, 2a \cdot y_{n+1}) = a \cdot\ gM(x_n, 2\,y_{n+1}) = 2a \cdot x_{n+1} = u_{n+1}$$

Wir veranschaulichen die durch (1) und (2) beschriebene Situation am Zahlenstrahl.
Die Ungleichungskette für die Mittelwerte besagt, dass sowohl das harmonische wie das geometrische Mittel kleiner als das arithmetische Mittel sind (die Gleichheit scheidet aus). Daraus ergibt sich nach (1) und (2) folgende Lage der Mittelwerte.



Die Umfänge u_n der einbeschriebenen Vielecke bilden eine wachsende Zahlenfolge, die Umfänge U_n der umbeschriebenen Vielecke eine fallende Zahlenfolge. Für die Differenz gilt: $U_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{2}(U_n - u_n)$; sie geht also gegen Null. In der Sprache der Analysis: Die Folge der Intervalle $[u_n, U_n]$ bildet eine Intervallschachtelung.

Man kann sogar zeigen, dass die Differenz $U_n - u_n$ mit jedem Schritt mindestens geviertelt wird; in der Sprache der Dezimalzahlen ausgedrückt: man gewinnt alle fünf Schritte mindestens drei Dezimalstellen nach dem Komma.
Um $U_{n+1} - u_{n+1} = hM(u_n, U_n) - gM(u_n, U_{n+1})$ besser abzuschätzen, kann man das geometrische Mittel durch das harmonische ersetzen. Da $hM(u_n, U_{n+1}) < gM(u_n, U_{n+1})$ ist, gilt $U_{n+1} - u_{n+1} < hM(u_n, U_n) - hM(u_n, U_{n+1})$. Es ist $hM(u_n, U_{n+1}) = hM(u_n, hM(u_n, U_n))$.
Durch Einsetzen der Definition des harmonischen Mittels und etwas rechnerischem Aufwand kann man dann zeigen, dass $hM(u_n, U_n) - hM(u_n, U_{n+1}) < \frac{1}{4}(U_n - u_n)$ und folglich auch $U_{n+1} - u_{n+1} < \frac{1}{4}(U_n - u_n)$ ist.

Archimedes führte seine Berechnungen bis zum einbeschriebenen und umbeschriebenen 96-Eck (n = 5) durch, wobei er einen etwas anderen Weg als wir ging*. Er hatte dabei keine Formelsprache wie wir zur Verfügung. Er kannte zudem keine Dezimalschreibweise für Zahlen. Bei jedem Schritt ersetzte er die auftretenden Quadratwurzeln geschickt durch kleinere bzw. größere Brüche. Die Seitenlänge des umbeschriebenen Sechsecks, die $2 : \sqrt{3}$ $(= 1{,}1547005\ldots)$ beträgt, schätzte er zum Beispiel durch $\frac{306}{265}$ $(= 1{,}15471698\ldots)$ ab. Bei der fünften Approximation erhielt er seine berühmte Abschätzung:
Der Umfang eines Kreises ist dreimal so groß wie der Durchmesser und noch um etwas größer, nämlich um weniger als ein Siebtel, aber um mehr als zehn Einundsiebzigstel des Durchmessers.
In unserer heutigen Formelsprache:

$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ in Dezimalschreibweise $3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$

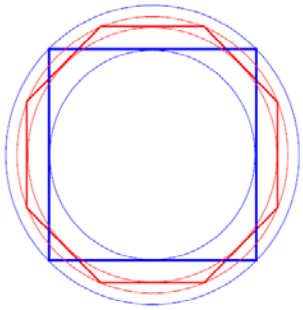
* Archimedes, Kreismessung, in Ferdinand Rudio: *Archimedes, Huygens, Lambert, Legendre. Vier Abhandlungen über die Kreismessung.* Teubner, Leipzig 1892.

π.2.3 Isoperimetrische Approximation nach René Descartes

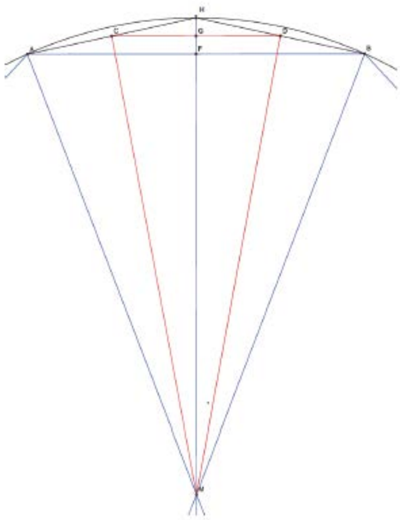
René Descartes (latinisiert: Renatus Cartesius) (1596 – 1650) war Philosoph, Mathematiker und Naturwissenschaftler. Sein wohl einflussreichstes Buch hat den Titel „Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences“ (1637). In der Mathematik gilt er als Wegbereiter der Analytischen Geometrie, die geometrische Probleme durch Übertragung in die Algebra angeht. Eines der wichtigsten Hilfsmittel ist die Koordinatisierung der Ebene oder des Raumes. Das nach Descartes benannte kartesische Koordinatensystem taucht allerdings in seinem Werk nicht auf.

(Quelle: wikipedia)

Idee: Beginne mit einem Quadrat der Seitenlänge 2 (d.h. der Inkreis hat den Radius 1) und konstruiere in jedem Schritt ein umfangsgleiches regelmäßiges Vieleck mit doppelter Eckenzahl.
Betrachte zu jedem der Vielecke den Inkreis und den Umkreis. Du erhältst so eine monoton steigende Folge von Inkreisradien r_n und eine monoton fallende Folge von Umkreisradien R_n, deren Unterschied immer kleiner wird. In der Sprache der Analysis: Die Folge der Intervalle $[r_n,R_n]$ bildet eine Intervallschachtelung, die den Radius r des „Grenzkreises“ approximiert.
Da alle Vielecke denselben Umfang 8 haben, gilt dies auch für den „Grenzkreis“, also $2\pi r = 8$.
Demnach gilt $\pi = \frac{4}{r}$.



Wir betrachten den Approximationsschritt in einem Ausschnitt: Die Ausgangssituation besteht aus einem einbeschriebenen $4{\cdot}2^{n-1}$-Eck. Wir kürzen ab $a = 4{\cdot}2^{n-1}$. Nach dem Approximationsschritt entsteht ein einbeschriebenes 2a-Eck.



Konstruktion des Bildausschnitts:
AB ist eine Seite des **a-Ecks** mit dem Mittelpunktswinkel AMB des Bestimmungsdreiecks. Die Mittelsenkrechte von AB trifft den Umkreis des a-Ecks im Punkt H. Die Punkte C und D sind die Mittelpunkte der Strecken AH und BH. Dann ist die Strecke CD parallel zu AB (warum?) und halb so lang wie AB (warum?).
Im Dreieck AMH ist MC Seitenhalbierende und folglich Winkelhalbierende des Winkels AMH (warum?). Dann ist der Mittelpunktswinkel CMD halb so groß wie der Mittelpunktswinkel AMB. Folglich ist das Dreieck CMD Bestimmungsdreieck des **2a-Ecks**, wobei das 2a-Eck den gleichen Umfang wie das a-Eck hat.

Beziehung zwischen den Inkreis- und Umkreisradien:
Im a-Eck ist der Inkreisradius $r_n = MF$ und der Umkreisradius $R_n = MA = MH$.
Im 2a-Eck ist der Inkreisradius $r_{n+1} = MG$ und der Umkreisradius $R_{n+1} = MC$. Man sieht unmittelbar:

$$MG = \frac{MF + MH}{2}, \quad \text{also} \quad r_{n+1} = aM(r_n, R_n).$$

Da das Dreieck MHC rechtwinklig ist, gilt nach dem Kathetensatz des Euklid

$$(MC)^2 = MG \cdot MH\,, \quad \text{also} \quad R_{n+1} = gM(r_{n+1}, R_n).$$

Hiermit kann man r und dann auch π näherungsweise berechnen.

Aus der Ungleichungskette

$$R_{n+1} - r_{n+1} = gM(r_{n+1}, R_n) - aM(r_n, R_n) < aM(r_{n+1}, R_n) - aM(r_n, R_n) = \frac{r_{n+1} - r_n}{2} = \frac{R_n - r_n}{4}$$

ergibt sich, dass die Differenz von Umkreis- und Inkreisradius der Vielecke mit jedem Schritt mindestens geviertelt wird; anders ausgedrückt: man gewinnt alle fünf Schritte mindestens drei Dezimalstellen nach dem Komma.

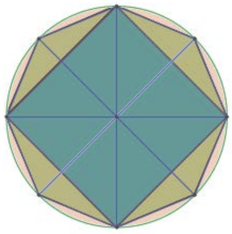
π.2.4 Approximation über die Fläche nach François Viète

François Viète (latinisiert: Franciscus Vieta) (1540 – 1603) war Rechtsberater führender Hugenotten, später Kronjurist. Eigentlich war die Mathematik für Vieta nur ein Hobby, trotzdem wurde er einer der wichtigsten und einflussreichsten Mathematiker. Er wird manchmal auch "Vater der Algebra" genannt, da er das Rechnen mit Buchstaben einführte und systematisch Symbole für Rechenoperationen benutzte, zumal er erkannte, dass dies weit mehr Möglichkeiten als bisher eröffnete. Bis dahin waren algebraische Aufgaben nämlich in Worthüllen eingekleidet, was sie ja nicht leichter machte – wie Schüler heute noch bei Textaufgaben erfahren können.

(Quelle: wikipedia)

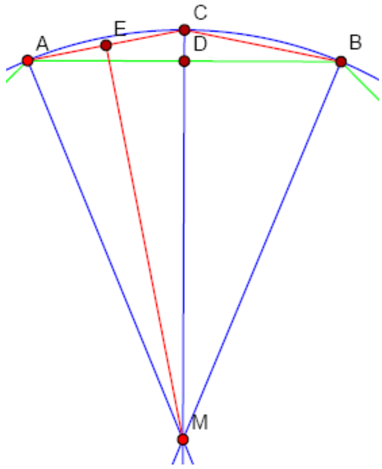
Idee: Die „Ausschöpfungsmethode“

Beginne mit einem dem Einheitskreis (Kreis mit dem Radius 1) einbeschriebenen Quadrat.
Konstruiere (durch fortgesetztes Halbieren des Mittelpunktswinkels) in jedem Schritt ein einbeschriebenes regelmäßiges Vieleck mit doppelter Eckenzahl. Auf diese Weise entstehen also $4 \cdot 2^{n-1}$-Ecke mit $n = 1, 2, 3, \ldots$.
Berechne jeweils die Flächeninhalte A_n.



Offensichtlich gilt $A_1 = 2$ und $A_n < 4$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Wir führen einen Approximationsschritt in einem vergrößerten Ausschnitt durch. Die Ausgangssituation besteht aus einem einbeschriebenen $4 \cdot 2^{n-1}$-Eck. Wir kürzen ab $a = 4 \cdot 2^{n-1}$.
Nach dem Approximationsschritt entsteht ein einbeschriebenes $4 \cdot 2^{n}$-Eck, kurz 2a-Eck.



Das a-Eck besteht aus a gleichschenkligen Bestimmungsdreiecken mit der Basis x_n und der Höhe h_n. Die Schenkel haben die Länge 1 (Radius des Einheitskreises). Aus der Zeichnung entnehmen wir:
$x_n = AB = 2 \cdot AD$, $h_n = MD$, also: $A_n = a \cdot AD \cdot MD$.

Das 2a-Eck besteht aus 2a gleichschenkligen Bestimmungsdreiecken mit der Basis x_{n+1} und der Höhe h_{n+1}. Die Schenkel haben die Länge 1. Aus der Zeichnung entnehmen wir:
$x_{n+1} = AC = 2 \cdot AE$, $h_{n+1} = ME$, also: $A_{n+1} = a \cdot AC \cdot ME$.

Demnach gilt:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{2a \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot ME}{a \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot AD \cdot MD} = \frac{AC \cdot ME}{AD \cdot MD}$$

Die Dreiecke ACD und MCE sind ähnlich (warum?). Folglich gilt: $\frac{AC}{AD} = \frac{MC}{ME} = \frac{1}{ME}$ und demnach:

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{1}{MD} = \frac{1}{h_n} \qquad \text{also:} \quad A_{n+1} = \frac{1}{h_n} \cdot A_n = \frac{1}{h_n} \cdot \frac{1}{h_{n-1}} \cdot A_{n-1} = \cdots = \frac{1}{h_n} \cdot \frac{1}{h_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{h_1} A_1 \quad (\blacksquare)$$

Das Problem ist verlagert: Statt einer Rekursionformel für die Flächeninhalte brauchen wir nun eine Rekursionformel für die Höhen in den Bestimmungsdreiecken. Wir zeigen:

$$h_{n+1} = \sqrt{\frac{1+h_n}{2}} = \frac{\sqrt{2+2h_n}}{2} \qquad (☺)$$

Beweis von (☺)

Im Dreieck MCE gilt nach dem Satz des Pythagoras: $(ME)^2 = (MC)^2 - (EC)^2 = 1 - (EC)^2$ wegen $MC = 1$.
Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ACD und MCE folgt:

$$\frac{EC}{MC} = \frac{DC}{AC} = \frac{DC}{2 \cdot EC}$$, wegen $MC = 1$ und $DC = 1 - MD$ also: $(EC)^2 = \frac{1 - MD}{2}$

Demnach gilt: $(ME)^2 = \frac{1+MD}{2}$ bzw. $h_{n+1}^2 = \frac{1+h_n}{2}$. Hieraus folgt (☺).

Um die Werte der Höhen h_n zu berechnen, starten wir mit $A_1 = 2$ und $h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mit Hilfe von (☺) ergibt sich dann: $h_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, $h_3 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$, $h_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}{2}$, ...

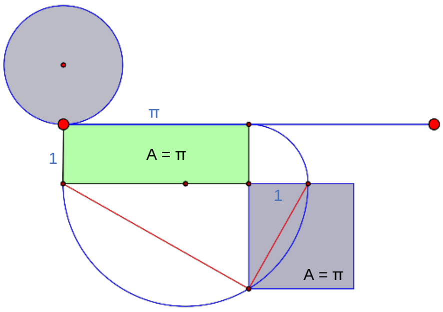
Setzt man diese Werte in (■) ein und führt den Grenzprozess zu Ende, erhält man wegen $A_n \to \pi$ eine faszinierende Formel für π, die nur aus Wurzeln und der Zahl 2 besteht:

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdot \ldots$$

Führt man die Rechnung praktisch durch, stellt man fest: Man gewinnt alle fünf Schritte drei Nachkommastellen mehr.

π.3 Die Quadratur des Kreises

Eine nahe liegende Idee, mit geometrischen Mitteln an den exakten Wert von π zu kommen, wäre, eine Strecke zu konstruieren, die genauso lang wie der halbe Umfang des Kreises ist. Diese Strecke könnte man dann durch Vergleich mit dem Radius des Kreises messen (wie man etwa die Diagonale eines Quadrats misst, indem man sie mit der Seite des Quadrats vergleicht). Man spricht hier von der Rektifizierung des Kreises.



Äquivalent dazu ist das Problem der Quadratur des Kreises: Konstruiere zum Kreis ein flächengleiches Quadrat. Die Äquivalenz beider Probleme ergibt sich aus folgender Überlegung (im Bild ist der Radius 1 gewählt): Könnte man den Kreis rektifizieren, würde man zunächst ein Rechteck konstruieren, dessen eine Seite so lang wie der halbe Umfang und dessen andere Seite so lang wie der Radius des Kreises ist. Nach dem Höhensatz des Euklid kann man dieses Rechteck in ein flächengleiches Quadrat verwandeln.
Die andere Richtung geht natürlich auch: Gelänge die Quadratur des Kreises, würde man das Quadrat mit derselben Methode in ein flächengleiches Rechteck verwandeln, dessen eine Seite gleichlang zum Radius des Kreises ist. Die andere Seite wäre dann so lang wie der halbe Kreisumfang.

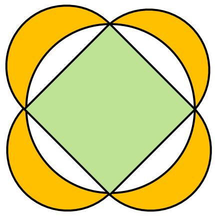
Die Quadratur des Kreises gehört zu den drei klassischen Problemen der antiken Mathematik. Diese sind:

- Die Quadratur des Kreises: Konstruiere zu einem gegebenen Kreis ein flächengleiches Quadrat.
- Die Winkeldreiteilung: Unterteile einen beliebig gegebenen Winkel in drei gleich große Winkel.
- Die Würfelverdopplung („Delisches Problem“): Konstruiere zu einem gegebenen Würfel einen Würfel mit dem doppelten Volumen.

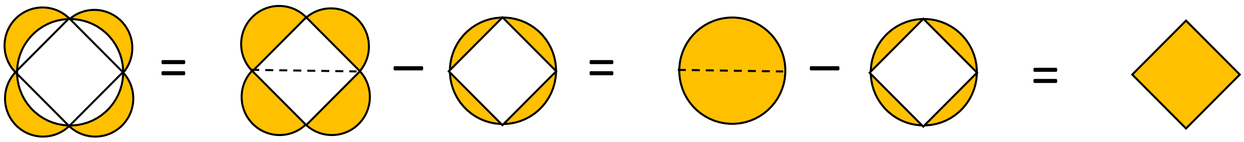
„Probleme” werden es allerdings erst durch die Festlegung der Konstruktionsbedingungen:

- Erlaubte Hilfsmittel sind nur die „Euklidischen Werkzeuge“ Zirkel und (unskaliertes) Lineal.
- Die Anzahl der Konstruktionsschritte muss endlich sein.

Hippokrates von Chios (5. Jhd. v.Chr., nicht zu verwechseln mit dem Arzt Hippokrates von Kos, auf den der „hippokratische Eid“ zurückgeht) hatte gezeigt, dass man eine durch Kreisbögen begrenzte Fläche (die „Möndchen des Hippokrates“) mit den obigen Konstruktionsbedingungen in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann. Der Beweis benutzt nur den Satz des Pythagoras. Die Quadratur der „Möndchen des Hippokrates“ ist also möglich. Warum sollte also nicht auch die Quadratur des Kreises möglich sein?



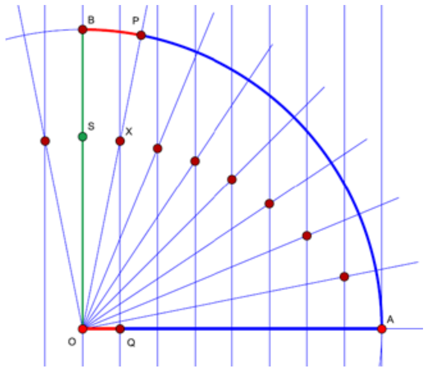
Beweis ohne Worte für die Möndchen des Hippokrates:



Es klingt unwahrscheinlich, aber erst 1882 bewies Ferdinand von Lindemann, dass die Quadratur des Kreises unter den obigen Konstruktionsbedingungen unmöglich ist. Typisch für die Mathematik ist, dass der Beweis hierfür nicht mit geometrischen Argumenten gelingt, sondern der Entwicklung ganz neuer Gebiete (Algebra, Analysis) und der Übertragung des Problems in die neue Denkweise bedurfte (vgl. Finale.4).

Wenn man allerdings eine der obigen Konstruktionsbedingungen fallen lässt, gelingt die Quadratur bzw. die Rektifizierung des Kreises. Entsprechende Lösungen gab es schon in der Antike.

π.3.1 Rektifizierung des Kreises mit Hilfe der Quadratrix des Hippias von Elis (um 420 v.Chr.).



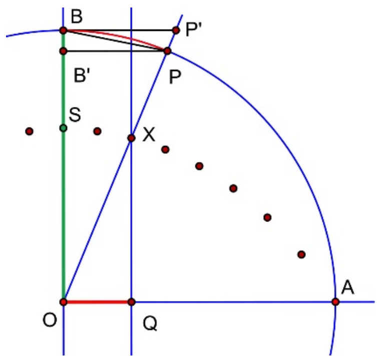
Die Quadratrix ist eine kinematisch erzeugte Figur. Ein Strahl OA dreht sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit gegen den Uhrzeigersinn um O. Gleichzeitig bewegt sich von A aus eine zu AO senkrechte Gerade mit gleichförmiger Geschwindigkeit zum Punkt O hin.
Der Schnittpunkt des Strahls um O und der Gerade senkrecht zu AO beschreibt eine Kurve, die Quadratrix.
Nehmen wir als Beispiel (siehe Zeichnung) den Strahl OP und die Senkrechte auf AO in Q: Der Schnittpunkt der beiden Linien ist der Punkt X, ein Punkt der Quadratrix.

Was bedeutet in beiden Fällen „mit gleichförmiger Geschwindigkeit“? Das soll heißen: Wenn sich der Strahl von OA bis OP gedreht und sich die Senkrechte von A aus bis Q bewegt hat, dann verhält sich der vom Punkt P zurückgelegte Kreisbogen $\widehat{AP}$ zum Viertelkreis $\widehat{AB}$ wie die von Q zurückgelegte Strecke $\overline{AQ}$ zur Strecke $\overline{AO}$ (dem Radius des Viertelkreises) oder, was dasselbe ist, dann verhält sich der vom Punkt P noch zurückzulegende Kreisbogen $\widehat{PB}$ zum Viertelkreis $\widehat{AB}$ wie die vom Punkt Q noch zurückzulegende Strecke $\overline{QO}$ zur Strecke $\overline{AO}$. In Formeln gefasst gilt für die zu einem beliebigen Punkt X der Quadratrix gehörenden Punkte P und Q: $\widehat{PB}:\widehat{AB} = \overline{QO}:\overline{AO}$ oder umgestellt $\widehat{PB}:\overline{QO} = \widehat{AB}:\overline{AO}$.
Das Verhältnis der Bogenlänge des Viertelkreises zum Kreisradius beträgt $\frac{\pi}{2}$. Folglich gilt für die zu einem beliebigen Punkt X der Quadratrix gehörenden Punkte P und Q immer $\widehat{PB}:\overline{QO} = \frac{\pi}{2}$.

Der Punkt S ist für die Rektifizierung des Kreises der entscheidende Punkt.

Behauptung: $\overline{BO}:\overline{SO} = \widehat{AB}:\overline{AO} = \frac{\pi}{2}$.

Beweisfigur



Beweis: Es gilt $\overline{B'P} < \widehat{BP}$ (warum?).
Dass auch $\widehat{BP} < \overline{BP'}$ gilt, ist nicht offensichtlich.
Wir betrachten den Kreissektor $\widehat{BOP}$ und das Dreieck $\triangle BOP'$.
Der Vergleich der Flächeninhalte ergibt $A_{\widehat{BOP}} < A_{\triangle BOP'}$ (■).

Für den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle BOP'$ gilt $A_{\triangle BOP'} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BO} \cdot \overline{BP'}$

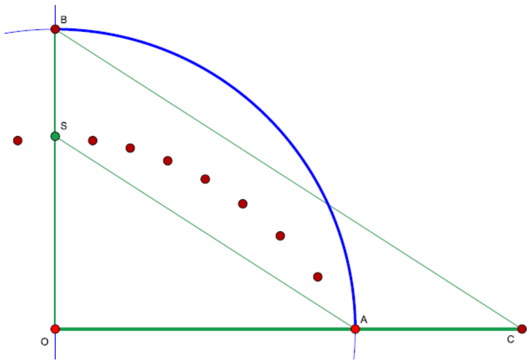
Der Flächeninhalt des Kreissektors $A_{\widehat{BOP}}$ verhält sich zur Kreisfläche ($\pi \cdot \overline{BO}^2$) wie die Bogenlänge $\widehat{BP}$ zum Kreisumfang ($2\pi \cdot \overline{BO}$).
Es gilt demnach $A_{\widehat{BOP}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BO} \cdot \widehat{BP}$.
Aus $A_{\widehat{BOP}} < A_{\triangle BOP'}$ folgt dann $\widehat{BP} < \overline{BP'}$ und weiter $\overline{B'P} < \widehat{BP} < \overline{BP'}$.

Die Division durch $\overline{QO}$ ergibt $\overline{B'P}:\overline{QO} < \widehat{BP}:\overline{QO} < \overline{BP'}:\overline{QO}$. Wegen $\widehat{BP}:\overline{QO} = \frac{\pi}{2}$ ist $\overline{B'P}:\overline{QO} < \frac{\pi}{2} < \overline{BP'}:\overline{QO}$.

Die Dreiecke BOP‘ und B‘OP sind zu dem Dreieck OXQ ähnlich; denn sie sind rechtwinklig und der Winkel SOX ist Wechselwinkel zum Winkel OXQ. Also gilt: $\overline{BP'}:\overline{QO} = \overline{BO}:\overline{XQ}$ und $\overline{B'P}:\overline{QO} = \overline{B'O}:\overline{XQ}$.
Folglich ist $\overline{B'O}:\overline{XQ} < \frac{\pi}{2} < \overline{BO}:\overline{XQ}$.
Je näher P an B bzw. Q an O heranrückt, umso näher rückt B‘ an B und X an S heran und umso kleiner wird die Differenz $\overline{BO} - \overline{B'O}$. Für den Grenzfall gilt also: $\overline{BO}:\overline{SO} = \frac{\pi}{2}$.

Die obere Zeichnung zeigt, wie man durch fortgesetztes Halbieren entsprechender Winkel und Strecken – eine elementare Konstruktion mit den Euklidischen Instrumenten Zirkel und Lineal – beliebig viele Punkte der Quadratrix exakt konstruieren kann. Aber nicht alle Punkte der Quadratrix lassen sich so konstruieren. Das liegt u.a. daran, dass man zwar jede Strecke, aber nicht jeden Winkel mit Zirkel und Lineal dreiteilen kann.
Insbesondere der Punkt S, in dem die Quadratrix den Schenkel OB trifft, lässt sich nicht exakt konstruieren, da hier der sich drehende Schenkel und die sich bewegende Senkrechte aufeinander fallen; er lässt sich allerdings beliebig genau approximieren.

Hat man den Punkt S durch Approximation konstruiert, folgt die Rektifizierung des Viertelkreises dann durch Anwendung des Strahlensatzes (siehe Zeichnung):
$\overline{CO}:\overline{AO} = \overline{BO}:\overline{SO} = \widehat{AB}:\overline{AO}$, also $\overline{CO} = \widehat{AB}$.
Die Strecke $\overline{CO}$ ist so lang wie der Bogen $\widehat{AB}$ des Viertelkreises und durch Vervierfachen der Strecke $\overline{CO}$ mit Zirkel und Lineal erhalten wir eine Strecke, die so lang ist wie der Umfang des Kreises mit dem Radius $\overline{AO}$.

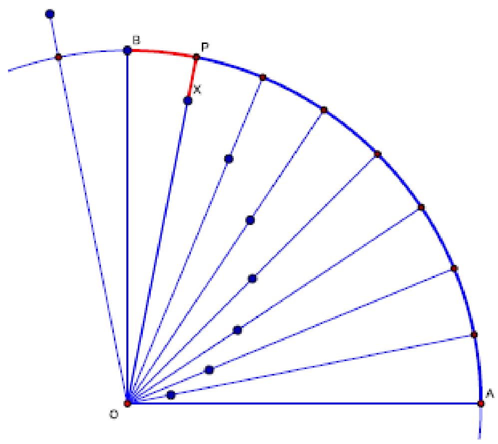


Nochmal gesagt: Die Rektifizierung des Kreises gelingt nur über den Schnittpunkt S der Quadratrix mit dem Radius $\overline{BO}$. Den kann man aber nicht in endlich vielen Schritten mit Zirkel und Lineal exakt konstruieren. Diese „Lösung" ist also keine im klassischen Sinne der Problemstellung.

π.3.2 Rektifizierung des Kreises mit Hilfe der archimedischen Spirale

„Wenn sich ein Strahl in einer Ebene um seinen Endpunkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit dreht, nach einer beliebigen Anzahl von Drehungen wieder in seine Anfangslage zurückkehrt und sich auf dem Strahl ein Punkt mit gleichförmiger Geschwindigkeit, vom Endpunkt des Strahls ausgehend, bewegt, so beschreibt dieser Punkt eine Spirale." (Archimedes 287–212 v.Chr.)

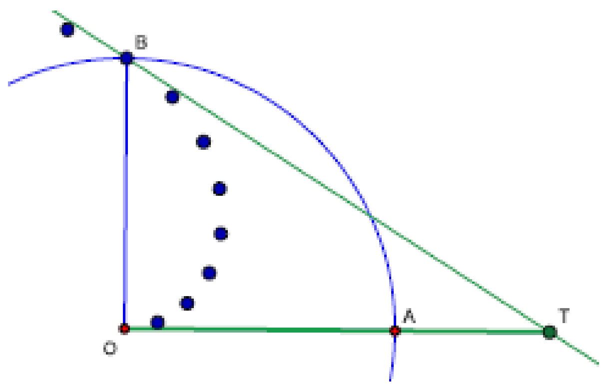
Zeichne einen Kreis mit den senkrechten Radien OA und OB. Betrachte den verlängerten Radius OA als Strahl, der sich gegen den Uhrzeigersinn um O dreht. Auf diesem Strahl bewegt sich von O aus der Punkt X. Wir setzen fest, dass der Punkt X nach einer Vierteldrehung des Strahls im Punkt B landet.



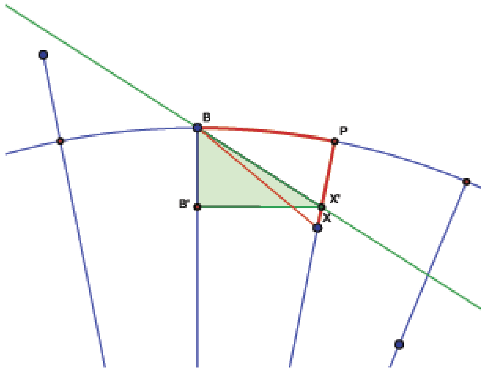
Was bedeutet es, dass sich der Strahl und der Punkt „mit gleichförmiger Geschwindigkeit" bewegen? Das soll heißen: Wenn der Strahl sich von OA bis OP gedreht und der Punkt sich von O bis X bewegt hat, dann verhält sich der vom Punkt P zurückgelegte Kreisbogen $\widehat{AP}$ zum Viertelkreis $\widehat{AB}$ wie die von X zurückgelegte Strecke $\overline{OX}$ zum Radius $\overline{OP}$ des Viertelkreises. Anders ausgedrückt: dann verhält sich der vom Punkt P noch zurückzulegende Kreisbogen $\widehat{BP}$ zum Viertelkreis $\widehat{AB}$ wie die von X noch zurückzulegende Strecke $\overline{PX}$ zur Strecke $\overline{PO}$ ($= \overline{BO}$). In Formeln gefasst, gilt für einen beliebigen Punkt X der Spirale und den zugehörigen Kreispunkt P: $\widehat{BP}:\widehat{AB} = \overline{PX}:\overline{BO}$ oder umgestellt: $\overline{PX}:\widehat{BP} = \overline{BO}:\widehat{AB}$.

Die Zeichnung zeigt, wie man durch fortgesetztes Halbieren von Winkeln und Strecken – eine elementare Konstruktion mit den Euklidischen Instrumenten Zirkel und Lineal – Punkte der Spirale exakt konstruieren kann.

Nun kommt die für die Rektifizierung des Kreises entscheidende Konstruktion: Die Spirale schneidet den Kreis in B. Zeichne in B die Tangente an die Spirale. Die Tangente schneidet den Strahl OA im Punkt T. Wir zeigen gleich, dass die Strecke $\overline{OT}$ dieselbe Länge hat wie der Bogen $\widehat{AB}$ des Viertelkreises. Durch Vervierfachen der Strecke $\overline{OT}$ mit Zirkel und Lineal erhalten wir also eine Strecke, die so lang ist wie der Umfang des Kreises mit dem Radius $\overline{OA}$.



Beweis der Behauptung: $\overline{OT} = \widehat{AB}$



Die Steigung der Tangente an die Spirale im Punkt B beträgt $\overline{BO} : \overline{OT}$. Zum Vergleich betrachten wir ein Steigungsdreieck BB'X' in der Nähe von B; es gilt $\overline{BO} : \overline{OT} = \overline{BB'} : \overline{B'X'}$.
Je näher man mit P an B heranrückt, um so mehr rücken X' und X zusammen, so dass man $\overline{BB'}$ durch $\overline{PX}$, sowie $\overline{B'X'}$ durch $\widehat{BP}$, insgesamt also $\overline{BB'} : \overline{B'X'}$ durch $\overline{PX} : \widehat{BP}$ ersetzen kann.
Aufgrund der Konstruktion der Spirale wissen wir:
$\overline{PX} : \widehat{BP} = \overline{BO} : \widehat{AB}$.
Im Grenzfall gilt also $\overline{BO} : \overline{OT} = \overline{BO} : \widehat{AB}$. Mithin ist $\overline{OT} = \widehat{AB}$.

Warum ist dies keine Rektifizierung des Kreises im klassischen Sinne der Problemstellung? Der Knackpunkt ist: Die Tangente an die Spirale im Punkt B lässt sich nicht (wie eine Kreistangente) in endlich vielen Schritten exakt konstruieren, sondern nur durch (exakt konstruierbare) Sekanten approximieren.

π.4 π in der Trigonometrie

Die Trigonometrie (griech. τρίγωνον *trígonon* ‚Dreieck', μέτρον *métron* ‚Maß') beschäftigt sich mit der Berechnung von Dreiecken: Winkel und Seiten werden rechnerisch miteinander in Beziehung gesetzt. Dazu ist als erstes der Winkelbegriff zu klären: Was versteht man unter einem Winkel und wie misst man ihn?

Die zentrale Erkenntnis der Trigonometrie lautet: Die Beherrschung der Verhältnisse im rechtwinkligen Dreieck macht die Beherrschung der Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten in einem beliebigen Dreieck möglich. So werden zunächst am rechtwinkligen Dreieck Sinus, Kosinus und Tangens definiert, um dann auf beliebige Winkel verallgemeinert zu werden. Dadurch wird der Blick eröffnet für eine funktionale Betrachtung: die trigonometrischen Funktionen und ihre Eigenschaften.

Die Trigonometrie stand schon früh im Interesse von Landvermessung und Astronomie. Bis ins 16. Jahrhundert wurde die Trigonometrie als Bestandteil der Astronomie gesehen und dementsprechend in astronomischen Lehrwerken behandelt. Die Ursprünge der trigonometrischen Funktionen Sinus, Kosinus und Tangens wurden aber nicht von den Griechen in der Antike, sondern erst von den Indern im 5. Jahrhundert n.Chr. entwickelt.

π.4.1 Winkelbegriff und Winkelmaß

Der Winkel ist ein relationaler Begriff. Wenn sich zwei Geraden schneiden, entstehen vier Winkel, von denen jeweils zwei gleich groß sind. Ein Winkel ist also ein geometrisches Gebilde, das aus zwei Halbgeraden (Strahlen) mit einem gemeinsamen Anfangspunkt besteht. Schenkel und Scheitel sind die jeweiligen Fachausdrücke. Wie soll man die Größe zweier Winkel vergleichen? Offensichtlich ist die Fläche zwischen den beiden Schenkeln, das Winkelfeld, bei einem größeren Winkel größer. Aber als absolutes Maß eignet sich das Winkelfeld nicht, da es unbeschränkt groß ist.
Man kann sich den Winkel auch als Beschreibung eines Richtungswechsels, einer Drehung denken. Der Scheitel ist der Drehpunkt und die beiden Schenkel geben Ausgangs- und Endrichtung an. Aber mit „Richtung" haben wir nur einen anderen Begriff herangezogen, der nicht weniger schwierig zu präzisieren ist. Die Vorstellung der Drehung hilft trotzdem weiter. Bei einer solchen Drehung bewegt sich jeder vom Scheitel verschiedene Punkt des Strahls auf einem Kreis um den Scheitel. Bei einer Volldrehung kehrt er wieder in seine Ausgangslage zurück. Irgendwie ist also ein Winkel ein Teil einer solchen Volldrehung.

Kreisläufe gibt es viele zu beobachten. Einer, der die Menschen seit jeher fasziniert und zu Beobachtungen angeregt hat, ist der Jahreskreislauf. Ob es die rund 360 Tage des Jahres und die Tatsache, dass man den Kreis durch Abtragen des Radius in sechs gleiche Teile zerlegen kann, die Babylonier dazu geführt hat, die Zahlen im Sechzigersystem darzustellen, ist Spekulation. Wohl aber verwenden wir bis heute das Sechzigersystem der Babylonier, wenn wir Winkel durch Gradzahlen messen. Der Vollwinkel beträgt 360°, der gestreckte Winkel 180°, der rechte Winkel 90° usw.. Der Versuch in der Zeit der französischen Revolution, auch hier das Dezimalsystem einzuführen, indem man für den rechten Winkel 100 Neugrad definieren wollte, hat sich nicht durchgesetzt.

Wohl aber eine andere Möglichkeit, die sich aus der Interpretation als Drehwinkel des sich um den Scheitelpunkt drehenden freien Schenkels ergibt. Ein vom Scheitel verschiedener Punkt des Strahls legt dabei einen Kreisbogen zurück. Zu verschiedenen Punkten auf dem Strahl gehören verschieden lange Kreisbögen; aber das Verhältnis der Bogenlänge zur Entfernung vom Scheitelpunkt, zum Radius des Kreisbogens, ist jeweils gleich. Dieses Verhältnis ist ein Maß für den Winkel, das sogenannte Bogenmaß. Im Gegensatz zur Bogenlänge ist also das Bogenmaß eine unbenannte Größe. Nur am Einheitskreis (Radius 1) ist das Bogenmaß die Maßzahl für die Bogenlänge.

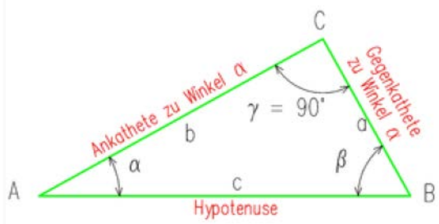
In der Physik und insbesondere bei funktionalen Betrachtungen wird das Bogenmaß häufig anstelle des Gradmaßes benutzt, im Alltag dagegen selten. Das liegt sicher auch an der mangelnden Anschaulichkeit ganzzahliger oder halbzahliger Bogenmaße; das Bogenmaß 1 entspricht im Gradmaß etwas mehr als 57°. Dagegen entspricht den anschaulich bedeutsamen Winkeln nur dann ein prägnantes Bogenmaß, wenn man es als Bruchteil oder Vielfaches von π darstellt.

Grad	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

Der Winkel als Maß für eine Drehung („Drehwinkel“) erfordert noch eine Vereinbarung über die Drehrichtung: Drehungen entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn werden mit positivem Grad- oder Bogenmaß angegeben, Drehungen im Uhrzeigersinn mit entsprechendem negativen Grad- oder Bogenmaß.

Natürlich kann man auch über den Vollwinkel hinaus drehen und erhält dann Drehwinkel größer als 360° bzw. 2π. Der Schnittpunkt des sich drehenden freien Schenkels mit dem Einheitskreis um den Scheitelpunkt wiederholt sich dann periodisch. Zu jedem Punkt auf dem Einheitskreis gehören also unendlich viele Winkel, die sich um Vielfache von 360° bzw. 2π unterscheiden.

π.4.2 Definition von Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck



In der Trigonometrie geht es um den rechnerischen Zusammenhang von Winkeln und Seiten im Dreieck. Ausgangspunkt dafür sind die elementargeometrischen Aussagen, dass Dreiecke mit gleichen Winkeln zueinander ähnlich sind und in ähnlichen Figuren das Seitenverhältnis entsprechender Seiten konstant ist.
Als Spezialfall werden zunächst rechtwinklige Dreiecke betrachtet und Sinus, Kosinus und Tangens als solche <u>Seitenverhältnisse</u>, also unbenannte Größen eingeführt. Sie sind deshalb zunächst nur definiert für Winkel zwischen 0° und 90°.

$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$ $\quad$ $\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$ $\quad$ $\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{a}{b}$ $\quad$ $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

Aus der Definition folgt, dass die Werte von Sinus und Kosinus zwischen 0 und 1 liegen, die von Tangens können dagegen beliebig groß werden. Aus der Betrachtung entsprechender Dreiecke ergeben sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras folgende Werte:

$\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin 45° = \cos 45° = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ $\quad$ $\sin 60° = \cos 30° = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$ $\quad$ bzw.
$\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$ $\quad$ $\sin\frac{\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$

Die Berechnung der übrigen Werte ist auf so elementare Weise nicht möglich. Deshalb wurden sie bis zur Einführung der Taschenrechner in Tabellen festgehalten, um mit ihnen in Anwendungen arbeiten zu können.

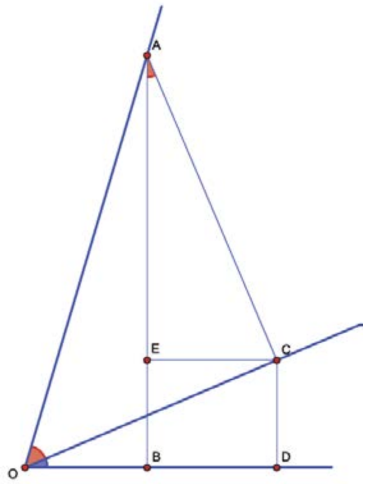
Im rechtwinkligen Dreieck gilt der <u>Satz des Pythagoras</u>: $a^2 + b^2 = c^2$. Dividiert man durch c^2 und nutzt man die Definitionen von Sinus und Kosinus, erfährt der Satz seine trigonometrische Variante:

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

Eine wichtige, früher vor allem auch zur Tabellierung von Sinus und Kosinus verwendete Eigenschaft wird durch die <u>Additionstheoreme</u> beschrieben. Sie zeigen, wie man die Sinus- und Kosinuswerte der Summe von zwei Winkeln aus den Sinus- und Kosinuswerten der einzelnen Winkel berechnen kann:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

Wir zeichnen eine Beweisfigur für Winkel α und β kleiner als 90°, deren Summe ebenfalls kleiner als 90° ist. Auf dem freien Schenkel von $\alpha + \beta$ legen wir einen Punkt A fest. Von A aus fällen wir das Lot auf den festen Schenkel von α (Punkt B) und auf den freien Schenkel von α (Punkt C). Von C aus fällen wir das Lot auf den festen Schenkel von α (Punkt D) und auf die Gerade AB (Punkt E). Dann hat der Winkel CAB ebenfalls die Größe α (warum?). Wir lesen ab:



$$\sin(\alpha+\beta) = \overline{AB} : \overline{OA} = (\overline{AE} + \overline{EB}) : \overline{OA} = (\overline{AE} + \overline{CD}) : \overline{OA}$$
$$= \overline{AE} : \overline{OA} + \overline{CD} : \overline{OA}$$

$\overline{AE} : \overline{AC} = \cos\alpha$ und $\overline{AC} : \overline{OA} = \sin\beta$
also $\overline{AE} : \overline{OA} = \cos\alpha\ \sin\beta$
$\overline{CD} : \overline{OC} = \sin\alpha$ und $\overline{OC} : \overline{OA} = \cos\beta$
also $\overline{CD} : \overline{OA} = \sin\alpha\ \cos\beta$

Mithin gilt: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

Wir lesen weiter ab:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OB} : \overline{OA} = (\overline{OD} - \overline{BD}) : \overline{OA} = \overline{OD} : \overline{OA} - \overline{EC} : \overline{OA}$$

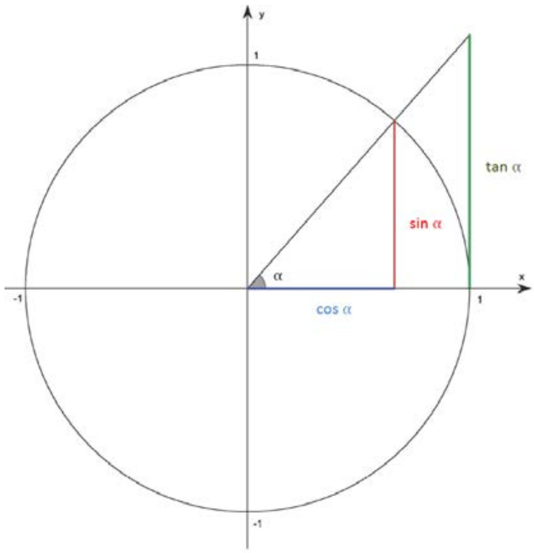
$\overline{OD} : \overline{OC} = \cos\alpha$ und $\overline{OC} : \overline{OA} = \cos\beta$ also $\overline{OD} : \overline{OA} = \cos\alpha\ \cos\beta$
$\overline{EC} : \overline{AC} = \sin\alpha$ und $\overline{AC} : \overline{OA} = \sin\beta$ also $\overline{EC} : \overline{OA} = \sin\alpha\ \sin\beta$

Mithin gilt: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

π.4.3 Verallgemeinerungen von Sinus und Kosinus für beliebige Winkel

Da Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck nur für Winkel zwischen 0° und 90° definiert sind, gelten die Additionstheoreme nur in diesem Bereich. Will man den Definitionsbereich erweitern, so ist eine naheliegende Forderung, dass dabei die Additionstheoreme weiterhin gültig bleiben sollen. Diese Forderung nennt man Permanenzprinzip. (Dieses Prinzip wird uns noch öfter begegnen.)
Aus dieser Forderung ergibt sich zum Beispiel:
$\sin 90° = \sin(45°+45°) = 2 \cdot \sin 45° \cos 45° = 1$ $\cos 90° = \cos(45°+45°) = (\cos 45°)^2 - (\sin 45°)^2 = 0$
Mit Hilfe des Permanenzprinzips lassen sich Sinus und Kosinus für beliebige Winkel auf Sinus und Kosinus für Winkel unter 90° zurückführen (Übung).

Eine andere einleuchtende Idee für die Verallgemeinerung der Definition von Sinus und Kosinus auf beliebige Winkel (die zum selben Ergebnis führt wie die mit Hilfe des Permanenzprinzips) liefert die Betrachtung am Einheitskreis (Kreis mit dem Radius 1) im Koordinatensystem. Man fasst den Winkel als Drehwinkel auf, mit dem sich ein Strahl, mit der positiven x-Achse startend, entgegengesetzt zum Uhrzeigersinn um den Ursprung dreht und dabei den Einheitskreis schneidet. Für den zu einem bestimmten Winkel gehörigen Schnittpunkt ist der Sinus des Winkels die Maßzahl für den Abstand des Punktes von der x-Achse und der Kosinus die Maßzahl für den Abstand des Punktes von der y-Achse.



Dann sind erste sinnvolle Erweiterungen:
$\sin 0° = \sin 0 = 0$ und $\sin 90° = \sin\frac{\pi}{2} = 1$
sowie $\cos 0° = \cos 0 = 1$ und $\cos 90° = \cos\frac{\pi}{2} = 0$.
Setzt man diese Interpretation stetig über 90° hinaus fort, ergeben sich folgende Erweiterungen auf alle Winkel bis 360°:

$\sin(90° + \alpha) = \sin(90° - \alpha)$ und $\cos(90° + \alpha) = -\cos(90° - \alpha)$ für $0° \leq \alpha \leq 90°$

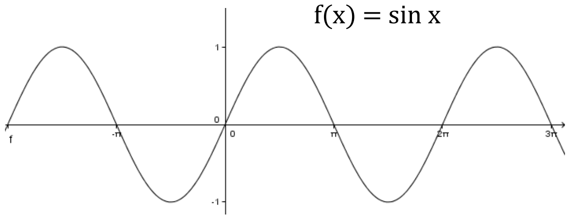
$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$ für $0° \leq \alpha \leq 180°$

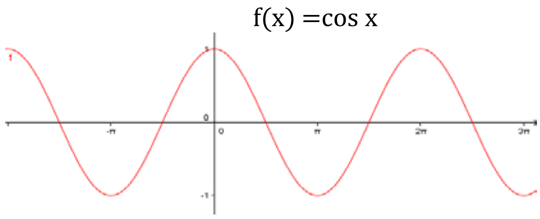
Aus der Interpretation des Winkels als Drehwinkel ergibt sich darüber hinaus die Periodizität: Für alle ganzen Zahlen k gilt: $\sin(\alpha + k \cdot 360°) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + k \cdot 360°) = \cos\alpha$ bzw.
$\sin(\alpha + k \cdot 2\pi) = \sin\alpha$ und $\cos(\alpha + k \cdot 2\pi) = \cos\alpha$

π.4.4 Die trigonometrischen Funktionen

Die Seitenverhältnisse Sinus und Kosinus hängen nur von dem Winkel ab, sind Funktionen des Winkels. Wird der Winkel als Drehwinkel interpretiert, sind die Sinus- und die Kosinus-Funktion für beliebige, auch negative Argumente erklärt. Diese harmlos erscheinende Bemerkung ist in Wirklichkeit ein fundamentaler Wechsel der mathematischen Betrachtungsweise. An die Stelle der Berechnung geometrischer Objekte tritt die analytische Beschreibung von reellen Funktionen mit bestimmten Eigenschaften. Der geometrische Hintergrund kann ausgeblendet werden. Dieser Perspektivwechsel von der Geometrie zu der Betrachtung von Funktionen ist einer der entscheidenden Schritte, die für das Verständnis der Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ erforderlich sind. Die Geometrie in dieser Formel reduziert sich auf π als Winkel, im Bogenmaß gemessen.

Wir wollen einige Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen zusammentragen.
Man kann reelle Funktionen im Koordinatensystem darstellen. Dazu trägt man auf der x-Achse die Winkel (am besten im Bogenmaß) ab. Der Wertebereich der Sinus- und der Kosinus-Funktion liegt zwischen -1 und +1, den Extremwerten.





Sinus- und Kosinus-Funktion sind periodische Funktionen mit der Periode 2π. Die Nullstellen der Sinus-Funktion sind alle ganzzahligen Vielfache von π. Die Nullstellen der Sinus-Funktion sind zugleich die Extremstellen der Kosinus-Funktion; speziell für die Maxima der Kosinus-Funktion gilt: Sie sind die ganzzahligen Vielfache von 2π.

Weitere Eigenschaften, die sich aus der Definition am Einheitskreis ergeben, sind:

$\sin(-x) = -\sin x$ (Punktsymmetrie der Sinus-Kurve)

$\cos(-x) = \cos x$ (Achsensymmetrie der Kosinus-Kurve)

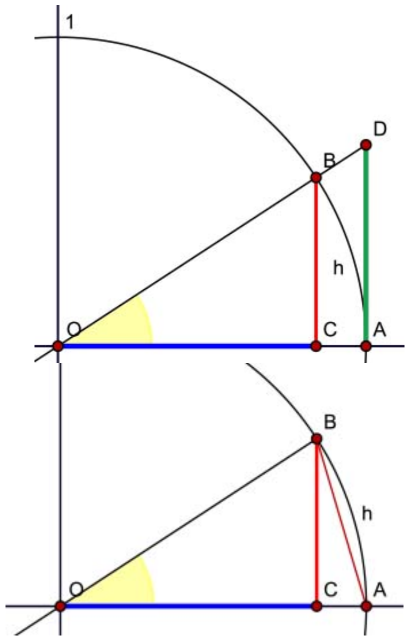
$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ (Phasenverschiebung)

Bei der Analyse reeller Funktionen ist man an ihrer Ableitung interessiert. Betrachtet man die Tangenten an die Sinus- und die Kosinus-Funktion, so sieht man: Die Steigung der Tangente an die Sinus-Kurve hat bei Null den größten Wert, fällt dann bis $\frac{\pi}{2}$, wo sie den Wert 0 hat, wird anschließend negative bis $\frac{3\pi}{2}$ etc.; kurz: der Verlauf der Tangentensteigung bei der Sinus-Funktion entspricht dem Verlauf der Kosinus-Funktion. Der Verlauf der Tangentensteigung bei der Kosinus-Funktion entspricht dem Verlauf der an der x-Achse gespiegelten Sinus-Funktion. D.h. für die Ableitung der beiden Funktionen gilt:

$$\sin' = \cos \quad \text{und} \quad \cos' = -\sin$$

Das ist eine Beobachtung, kein Beweis. Wir erinnern an die Definition der Ableitung mit Hilfe der Tangentensteigung. Bei einer Funktion f ist die Tangente durch den Punkt $(x|f(x))$ ihres Graphen der Grenzfall der Sekante durch die benachbarten Punkte $(x|f(x))$ und $(x + h|f(x + h))$ für h gegen Null.

Die Steigung der Sekante lässt sich durch den Differenzenquotienten $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ beschreiben. Dann ist die Steigung der Tangente, die Ableitung, definiert durch $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.



Wir bestimmen zunächst die Ableitung der Sinus- und der Kosinus-Funktion an der Stelle $x = 0$.
Laut Definition ist $\sin'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
Aus der Beweisfigur lesen wir ab:
$h = \widehat{AB}$ und $\sin(h) = \overline{BC}$ und $\overline{BC} < \widehat{AB}$, mithin $\frac{\sin(h)}{h} < 1$;
$h = \widehat{AB}$ und $\sin(h) = \overline{BC}$ und $\widehat{AB} < \overline{AD}$, mithin $\frac{\sin(h)}{h} > \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}}$.
Für $h \to 0$ geht $\overline{BC}$ gegen $\overline{AD}$. Also ist $\sin'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$.

Laut Definition ist $\cos'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h}$.
Wir lesen ab: $\cos(h) = \overline{OC} = \overline{OA} - \overline{CA} = 1 - \overline{CA}$, also $\frac{\cos(h)-1}{h} = -\frac{\overline{CA}}{\widehat{AB}}$.
Aus $\widehat{AB} > \overline{AB}$ ergibt sich $\frac{\cos(h)-1}{h} < -\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}}$. Wir lesen ab $\frac{\overline{CA}}{\overline{AB}} = \sin \measuredangle ABC$.

Für $h \to 0$ gilt geht der Winkel $\measuredangle ABC$und folglich auch $\sin \measuredangle ABC$ gegen Null. Also ist $\cos'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$.

Aus der Kenntnis der Ableitung an der Stelle Null können wir nun mit Hilfe der Additionstheoreme die Ableitung der Sinus- und der Kosinus-Funktion an einer beliebigen Stelle x bestimmen.

Aus dem Additionstheorem für die Sinus-Funktion ergibt sich:
$\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$.
Folglich ist $\sin'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \sin(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
Aus $\cos'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ und $\sin'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ schließen wir $\sin'(x) = \cos(x)$

Aus dem Additionstheorem für die Kosinus-Funktion ergibt sich:
$\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} = \cos(x) \cdot \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h}$.
Folglich ist $\cos'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \cos(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x) \cdot \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h}$.
Aus $\cos'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(h)-1}{h} = 0$ und $\sin'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$ schließen wir $\cos'(x) = -\sin(x)$

Für die 2. Ableitung der Sinus- und der Kosinus-Funktion gilt: sin'' = - sin und cos'' = - cos,
in Worten: die 2. Ableitungen sind gleich der ursprünglichen Funktion mit entgegengesetztem Vorzeichen.
Diese einfache Beziehung zwischen der 2. Ableitung und der ursprünglichen Funktion wird noch eine entscheidende Rolle auf dem Weg zu der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ spielen.

Ausblick

Die Zahl π beschreibt das Verhältnis von Umfang zu Durchmesser für jeden beliebigen Kreis. Zur Winkelmessung kann man das Verhältnis von Bogenlänge (des Mittelpunktswinkels) zum Kreisumfang wählen, das Bogenmaß. Das Bogenmaß ist also ein Bruchteil oder ein Vielfaches von 2π.

Der rechnerische Zusammenhang zwischen Strecken und Winkeln führt über die Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck und ihre Verallgemeinerung am Einheitskreis (oder mit Hilfe des Permanenzprinzips). Eine neue Sichtweise kommt durch die funktionale Betrachtung dieser Seitenverhältnisse, also die Einführung der trigonometrischen Funktionen ins Spiel. Aus dem Proportionalitätsfaktor π (Umfang zu Durchmesser) wird auf diese Weise eine Nullstelle der Sinus-Funktion und eine Extremstelle der Kosinus-Funktion.

Das ist einer der Schlüssel zu der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$.
Die beiden anderen Schlüssel sind eine besondere Darstellung von Funktionen, vorgeführt am Beispiel der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ und übertragen auf die Sinus- und die Kosinus-Funktion, sowie die Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen durch Einführung der imaginären Einheit i.

Kapitel i: Komplexe Zahlen

Das Kapitel π befasst sich mit Geometrie, der konstruktiven und der berechnenden, verbunden durch die begründende Geometrie. Nun wenden wir uns der Grundlage des Rechnens zu den Zahlen. Wir gehen dabei nicht historisch vor, sondern schildern die Entwicklung des Zahlbegriffs aus einem sachlogischen Zusammenhang heraus. Zahlen wurden von Anfang an nicht nur zum Zählen benutzt, sondern auch zum Messen und vor allem zum Rechnen, zum Addieren, zum Subtrahieren, zum Multiplizieren, zum Dividieren - das sind die vier Grundrechenarten - , dann aber auch zum Potenzieren. Mit den Zahlen, die man zum Zählen braucht, den natürlichen Zahlen, geht das alles nur unterschiedlich gut, Grund, sich über „neue“ Zahlen Gedanken zu machen.

i.1 Zahlbereichserweiterungen

Durch Störungen des Rechnens („geht nicht“) und den Drang nach Freiheit des formalen Rechnens kommt es zu Erweiterungen des Zahlbegriffs und der bis dahin bekannten Rechen-Welt der Zahlen. Historisch empfand man mitunter Unbehagen über die „Bedeutung“ der „neuen“ Zahlen, vor allem wenn man für sie und das Rechnen mit ihnen „in der Wirklichkeit“ keine erkennbaren Grundvorstellungen entwickeln kann. Die Erweiterung des jeweils bekannten Zahlbereichs erfolgt formal[1] durch Konstruktion eines neuen Bereichs von Objekten, die sich „wie Zahlen verhalten“, d.h. mit denen man „rechnen“ kann wie mit den bisher bekannten Zahlen. Das bedeutet, dass man zu den neuen Zahlen auch die Rechenoperationen neu definieren und streng genommen mit neuen Symbolen versehen muss. Da sie aber bei den bisher bekannten Zahlen mit den alten Rechenoperationen übereinstimmen sollten, wählt man der Einfachheit halber dieselben Symbole. Beispiel: Die Multiplikation natürlicher Zahlen kann man als fortgesetzte Addition interpretieren; bei der Multiplikation von negativen Zahlen oder von Brüchen macht das keinen Sinn. Hier muss ihr ein neuer Sinn gegeben werden und zwar so, dass die Rechenregeln (möglichst) erhalten bleiben. Gleichwohl verwendet man das alte Symbol ·.

Die Konstruktion der neuen Zahlenmenge lässt sich von zwei Prinzipien leiten:

- Einbettungsprinzip: Die alten Zahlen sollen in die neuen eingebettet sein; d.h. in der neuen Zahlenmenge gibt es eine Teilmenge, die sich genauso verhält und die dieselbe Struktur besitzt wie die Menge der alten Zahlen.
- Permanenzprinzip: Das Rechnen mit den neuen Zahlen soll möglichst ausnahmslos nach denselben Regeln erfolgen wie mit den alten. Bei der Erweiterung sollen die bisherigen Rechenregeln möglichst weiter gelten.

Wir bringen noch einmal die Rechenregeln, um die es hier geht, in Erinnerung. Sie gehören von Anfang an zum Grundverständnis beim Umgang mit Zahlen.

<table>
<tr><th colspan="2">Rechenregeln für Strichrechnung und Punktrechnung</th></tr>
<tr><td align="center">Kommutativgesetz der Addition
Für alle Zahlen a und b gilt:
$a + b = b + a$</td><td align="center">Kommutativgesetz der Multiplikation
Für alle Zahlen a und b gilt:
$a \cdot b = b \cdot a$</td></tr>
<tr><td align="center">Assoziativgesetz der Addition
Für alle Zahlen a, b und c gilt:
$(a + b) + c = a + (b + c)$</td><td align="center">Assoziativgesetz der Multiplikation
Für alle Zahlen a, b und c gilt:
$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Kommutativ- und Assoziativgesetz lassen sich für beide Operationen auf mehrere Zahlen verallgemeinern. Man kann sie dann auch zusammenfassen zu der Regel:
Die Reihenfolge der Summanden bzw. der Faktoren ist beliebig.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Für die Subtraktion und für die Division gilt weder das Kommutativgesetz noch das Assoziativgesetz.</td></tr>
</table>

Das Zusammenspiel von Strichrechnung und Punktrechnung regeln die Distributivgesetze.

[1] Die formale Beschreibung der Zahlbereichserweiterungen gehört nicht zu den Zielen dieser Veranstaltung.

Distributivgesetze Für alle Zahlen a, b und c gilt:		
Addition und **Multiplikation**	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	
Subtraktion und **Multiplikation**	$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$ und $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$	
Addition und **Division**	$(a + b) : c = a : c + b : c$	$(c \neq 0)$
Subtraktion und **Division**	$(a - b) : c = a : c - b : c$	$(c \neq 0)$

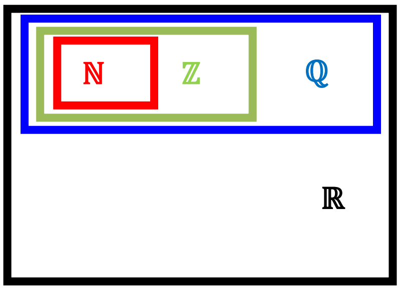
Zum Rechnen gehören auch der Größenvergleich (Kleiner- bzw. Größer-Relation) und seine Regeln sowie die Verträglichkeitsbedingungen mit den Rechenoperationen, die sog. Monotoniegesetze. Darauf kommen wir später noch zu sprechen.

Ordnungsgesetze der Kleiner-Relation Für alle Zahlen a, b und c gilt:	
Trichotomie	Genau eine der drei Aussagen trifft zu: $a < b$ oder $b < a$ oder $a = b$
Transitivität	Wenn $a < b$ und $b < c$, dann $a < c$.
Monotoniegesetz der Addition / Subtraktion Für alle Zahlen a, b und c gilt: wenn $a < b$, dann $a + c < b + c$ wenn $a < b$, dann $a - c < b - c$	**Monotoniegesetz der Multiplikation / Division** Für alle Zahlen a, b und c gilt: wenn $a < b$ und $c > 0$, dann $a \cdot c < b \cdot c$ wenn $a < b$ und $c > 0$, dann $a : c < b : c$

Dieses Regelwerk soll nach Möglichkeit bei allen Zahlbereichserweiterungen erhalten bleiben.

„*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*“ Das ist ein oft zitierter Spruch von Leopold Kronecker, einem berühmten Mathematiker des 19. Jahrhunderts. Mit „ganzen Zahlen“ hat er allerdings diejenigen gemeint, die wir heute als „natürliche Zahlen“ bezeichnen. Er hat damit zum Ausdruck bringen wollen, dass jede Erweiterung einen Ausgangspunkt haben muss und dass am Anfang die **natürlichen Zahlen** stehen, die er nicht aus anderen Größen konstruiert sehen will.

Die Menge der natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}$ abgekürzt bzw. mit $\mathbb{N}_0$, wenn man die Null mit einbezieht. In $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{N}_0$ kann man uneingeschränkt addieren und multiplizieren, aber weder uneingeschränkt subtrahieren noch dividieren.



Um auch uneingeschränkt subtrahieren zu können, wird $\mathbb{N}_0$ zur Menge $\mathbb{Z}$ der **ganzen Zahlen** erweitert. Zur Darstellung der ganzen Zahlen verwendet man die Vorzeichen – für die negativen Zahlen und + für die positiven Zahlen. Die (von Null verschiedenen) natürlichen Zahlen sind also als positive ganze Zahlen in $\mathbb{Z}$ eingebettet. Das Addieren und seine Umkehrung, das Subtrahieren, werden auf natürliche Weise übertragen. Das Gleiche gilt für die Multiplikation von zwei ganzen Zahlen, wenn eine davon positiv (= natürliche Zahl) oder Null ist. Dann kann man Multiplizieren als wiederholtes Addieren definieren. Diese Vorstellung versagt aber bei der Multiplikation zweier negativer Zahlen. Die bekannte Regel „minus mal minus ergibt plus“ ist eine zwangsläufige Folge aus dem Permanenzprinzip, wonach u.a. das Distributivgesetz auch in der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen weiter gelten soll. Am Beispiel von $(-1)\cdot(-1)$ geht die Argumentation so: aus $(-1)\cdot 0 = 0 = (-1)\cdot((-1)+(+1))$ folgt nach dem Distributivgesetz $0 = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot(+1) = (-1)\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 = (-1)\cdot(-1) + (-1)$. Addiert man $+1$, erhält man $+1 = (-1)\cdot(-1)$.

Will man uneingeschränkt dividieren können, muss man $\mathbb{N}$ zur Menge $\mathbb{B}$ der **Bruchzahlen** erweitern. Man erklärt sozusagen die Divisions<u>aufgabe</u> zur Zahl! Eine Bruchzahl kann durch einen <u>gewöhnlichen Bruch</u> dargestellt werden, allerdings auf unendlich viele Weisen; d.h. alle diese gewöhnlichen Brüche sind wertgleich. Einer davon hat die besondere Eigenschaft, dass Zähler und Nenner teilerfremd sind; er wird oft als Standardbruch genommen.

Man kann eine Bruchzahl aber auch als Dezimalbruch darstellen; er hat entweder endlich viele Nachkommastellen oder aber unendlich viele, die durch ständige Wiederholung derselben endlichen Ziffernfolge (Periode) gekennzeichnet sind. Schließt man die Periode 0 und die Periode 9 aus, gibt es zu jeder Bruchzahl nur einen Dezimalbruch.
Die natürlichen Zahlen sind Bruchzahlen, die sich als Bruch mit dem Nenner 1 oder als Dezimalbruch ohne von Null verschiedene Nachkommastellen darstellen lassen. Sie sind damit in $\mathbb{Z}$ eingebettet. In $\mathbb{B}$ kann man uneingeschränkt multiplizieren und dividieren (außer durch Null), aber nicht subtrahieren.

Analog zu der Erweiterung von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{Z}$ kann man $\mathbb{B}$ um die Null und die negativen Bruchzahlen zur Menge $\mathbb{Q}$ der **rationalen Zahlen** erweitern. Mit rationalen Zahlen kann man alle Grundrechenarten uneingeschränkt ausführen. Einzige Ausnahme ist und wird es auch bleiben die Division durch Null. Sie bleibt aus logischen Gründen verboten, da sie mit den übrigen Rechengesetzen kollidiert.
Gleich zu welcher Zahlenmenge eine Zahl a gehört, es ist immer $a \cdot 0 = a \cdot (1 - 1) = a \cdot 1 - a \cdot 1 = 0$. Gäbe es zu einer von Null verschiedenen Zahl b eine Zahl a, so dass $b : 0 = a$ wäre, dann müsste aufgrund des Zusammenhangs zwischen Division und Multiplikation $b = a \cdot 0$ und folglich $b = 0$ sein. Das ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, dass die Zahl b von Null verschieden sein sollte. Eine Zahl a mit $b : 0 = a$ kann es also nicht geben.
Diese Argumentation funktioniert nur für eine von Null verschiedene Zahl b. Kann es eine Zahl a geben, so dass $0 : 0 = a$ wäre? Dann müsste aufgrund des Zusammenhangs zwischen Division und Multiplikation $0 = a \cdot 0$ sein. Das gilt aber für alle Zahlen aus der jeweils betrachteten Zahlenmenge; d.h. es ist nicht möglich, eine Zahl $0 : 0$ eindeutig zu definieren.

Bis auf diesen nicht zu reparierenden Schönheitsfehler ist man also in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen, was das Rechnen mit den vier Grundrechenarten angeht, im gelobten Land.

Zahlen dienen aber von alters her nicht nur zum **Rechnen**, sondern auch zum **Messen**. Hier tut sich eine neue Störung auf: Mit den rationalen Zahlen kann man nicht alle Strecken vermessen. Messen heißt vergleichen und ein quantitativer Längenvergleich zweier Strecken sucht nach einer möglichst großen Maßstrecke, durch die man beide Strecken auslegen kann; gibt es ein solches gemeinsames Maß, dann lässt sich die eine Strecke als Bruchteil der anderen beschreiben. Schon die Griechen fanden heraus, dass es ein solches gemeinsames Maß zum Beispiel für die Seite und die Diagonale eines Quadrats oder die Seite und die Diagonale eines regelmäßigen Fünfecks nicht geben kann. Was die Griechen durch einen Widerspruchsbeweis mit geometrischen Argumenten zeigten, lässt sich auch mit arithmetischen Argumenten beweisen: Wählt man als Länge der Quadratseite 1, dann kann man die Länge der Diagonale nicht durch einen Bruch oder durch einen endlichen oder unendlich-periodischen Dezimalbruch beschreiben.
Will man also solche Maßzahlen noch zur bisherigen Welt der Zahlen hinzufügen, muss man die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen (ratio (lat.) = Verhältnis, Quotient) um die irrationalen Zahlen erweitern, also Zahlen, die sich nicht durch einen Bruch darstellen lassen. Man gelangt zu den **reellen Zahlen**, deren Menge mit $\mathbb{R}$ bezeichnet wird. Da man jede Strecke von einem festen Punkt, dem Ursprung, aus auf einer Geraden abtragen kann, ist die Zahlengerade die beste Veranschaulichung der reellen Zahlen: Jedem Punkt der Zahlengeraden entspricht genau eine reelle Zahl und umgekehrt. Skaliert man die Zahlengerade mit einer Dezimaleinteilung, dann ist ein Punkt entweder einer der Skalierungspunkte – d.h. die zugehörige Zahl lässt sich durch einen endlichen Dezimalbruch darstellen – oder der Punkt lässt sich durch immer feiner werdende Einteilungen einschachteln, dann lässt sich die Zahl durch einen unendlichen Dezimalbruch darstellen. Kurz: Die einfachste arithmetische Charakterisierung von $\mathbb{R}$ ist die, dass sich jede von Null verschiedene reelle Zahl durch einen positiven oder negativen endlichen oder unendlichen (periodischen oder nicht-periodischen) Dezimalbruch darstellen lässt.

i.2 Einführung der komplexen Zahlen

Wir fassen die bisherigen Erweiterungsschritte noch einmal in einer Tabelle zusammen und kündigen zugleich den nächsten Schritt an.

Störungen beim	führen zur Einführung von	zusammen mit den alten Zahlen zu	
Subtrahieren natürlicher Zahlen	negativen Zahlen	ganzen Zahlen	(Menge $\mathbb{Z}$)
Dividieren* natürlicher Zahlen	Brüchen	(positiven) Bruchzahlen	(Menge $\mathbb{B}$)
Dividieren* ganzer Zahlen oder Subtrahieren von Bruchzahlen		rationalen Zahlen	(Menge $\mathbb{Q}$)
Messen	irrationalen Zahlen	reellen Zahlen	(Menge $\mathbb{R}$)
Wurzelziehen	imaginären Zahlen	komplexen Zahlen	(Menge $\mathbb{C}$)

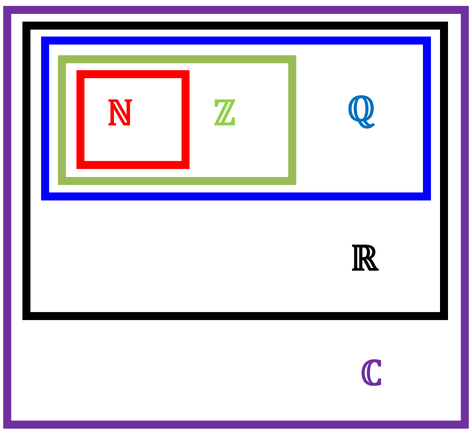
*Die Division durch Null ist und bleibt aus logischen Gründen verboten, da sie mit den übrigen Rechengesetzen kollidiert.

In der Welt der reellen Zahlen heißt es beim Wurzelziehen aus einer negativen Zahl: „Geht nicht!“ Warum? Eine von Null verschiedene reelle Zahl ist entweder positiv oder negativ. Das Quadrat einer positiven Zahl ist positiv, das Quadrat einer negativen Zahl ist aber auch positiv, wie oben gesehen. Keine der „alten“ Zahlen löst also die Gleichung $x^2 + 1 = 0$.

Um diese „Störung“ zu beheben, wird zu der alten Welt $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen eine neue Zahl i, die <u>imaginäre Einheit</u>, hinzugefügt. Für diese Zahl i soll gelten: $\underline{i^2 = -1}$.
Man könnte zunächst meinen, dass man nun noch weitere Zahlen hinzufügen muss, nämlich zu jeder negativen Zahl diejenige, deren Quadrat sie ist. Dass das nicht nötig ist, folgt aus dem Permanenzprinzip. Die imaginäre Einheit i soll mit den reellen Zahlen multipliziert werden können. So erhält man die <u>imaginären Zahlen</u> $b \cdot i$ oder kurz bi mit beliebiger, von Null verschiedener reeller Zahl b. Da die Reihenfolge der Faktoren beliebig ist, gilt $(b \cdot i) \cdot (b \cdot i) = b^2 \cdot i^2 = -b^2$. Imaginäre Zahlen sind also die Zahlen, deren Quadrat eine negative reelle Zahl ergibt. Zu jeder negativen reellen Zahl gibt es zwei solche imaginäre Zahlen; z.B. $(2i)^2 = -4$ und $(-2i) = -4$. Die imaginären Zahlen $b \cdot i$ mit beliebiger, von Null verschiedener reeller Zahl b sind damit die „neuen“, den reellen Zahlen hinzugefügten Zahlen.

Die Addition und die Subtraktion zweier imaginärer Zahlen führen nach dem Distributivgesetz wieder zu imaginären Zahlen. Die imaginären Zahlen $b \cdot i$ sollen außerdem zu einer beliebigen von Null verschiedenen reellen Zahl a addiert werden können. Das Ergebnis kann weder eine reelle Zahl noch eine imaginäre Zahl sein. Denn wäre $a + b \cdot i$ eine reelle Zahl c, dann wäre die imaginäre Zahl $b \cdot i$ gleich der reellen Zahl $c - a$. Wäre dagegen $a + b \cdot i$ eine imaginäre Zahl $c \cdot i$ dann wäre die reelle Zahl a gleich der imaginären Zahl $(c - b) \cdot i$. Eine imaginäre Zahl kann aber keine reelle Zahl sein, da das Quadrat der ersteren negativ, das der letzteren nicht negativ ist.

Durch Addition von reellen und imaginären Zahlen erhält man die **komplexen Zahlen** $z = a + b \cdot i$ mit beliebigen reellen Zahlen a und b. Die reelle Zahl a heißt auch <u>Realteil</u>, die reelle Zahl b <u>Imaginärteil</u> der komplexen Zahl z. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet. Sie enthält die Menge der reellen Zahlen (Imaginärteil $b = 0$) und die Menge der imaginären Zahlen (Realteil $a = 0$ und Imaginärteil $b \neq 0$) als disjunkte Teilmengen.



Wir sind bisher schon davon ausgegangen, dass die Rechenoperationen auf die neuen Zahlen übertragen werden können, und zwar so, dass das Permanenzprinzip beachtet wird.

Das bedeutet u.a.:

- Ist der Imaginärteil Null, so ergeben sich Summe, Differenz, Produkt und Quotient wie bei reellen Zahlen üblich. $\mathbb{R}$ mit den vier Grundrechenarten und ihren Rechenregeln ist in $\mathbb{C}$ eingebettet.

- Ist der Realteil Null,
    - so sind Summe und Differenz imaginäre Zahlen, die sich durch Addition bzw. Subtraktion der Imaginärteile ergeben (Distributiv-Gesetz!).
    - so sind Produkt und Quotient reelle Zahlen.

Nach den bekannten Rechengesetzen der Addition, Subtraktion und Multiplikation folgt:

Addition	$(a+b\,i)+(c+d\,i)=(a+c)+(b+d)\,i$
Subtraktion	$(a+b\,i)-(c+d\,i)=(a-c)+(b-d)\,i$
Multiplikation	$(a+b\,i)\cdot(c+d\,i)=(a\cdot c-b\cdot d)+(a\cdot d+b\cdot c)\,i$

Welche komplexe Zahl ist das Ergebnis der Division $(a+b\cdot i):(c+d\cdot i)$ bzw. $\frac{a+b\cdot i}{c+d\cdot i}$?
Fangen wir mit dem Spezialfall an: Welche komplexe Zahl ist das Ergebnis der Division $1:(c+d\cdot i)$ bzw. $\frac{1}{c+d\cdot i}$? Dazu müsste es gelingen den Bruch so zu erweitern, dass der Nenner eine von Null verschiedene reelle Zahl wird; dann könnten wir das Ergebnis wieder nach dem Distributivgesetz als Summe einer reellen Zahl und einer imaginären Zahl schreiben. Nach dem dritten binomischen Lehrsatz gilt $(c+d\cdot i)\cdot(c-d\cdot i)=c^2-(d\cdot i)^2=c^2+d^2$. Folglich müssen wir den Bruch $\frac{1}{c+d\cdot i}$ mit $(c-d\cdot i)$ erweitern und erhalten: $\frac{1}{c+d\cdot i}=\frac{c}{c^2+d^2}-\frac{d}{c^2+d^2}\cdot i$. Für den allgemeinen Fall gilt $\frac{(a+b\,i)}{(c+d\,i)}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\,i$.

Wichtiger als die Formel ist der Gedanke, wie man aus einem Bruch mit einem komplexen Nenner einen Bruch mit einem reellen Nenner macht: Mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners erweitern!
Zu einer komplexen Zahl $z=a+b\cdot i$ heißt die Zahl $\bar{z}=a-b\cdot i$ die zu z konjugiert komplexe Zahl.
Es gilt $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$.

Das Konjugieren einer komplexen Zahl ist eine wichtige Operation (nicht nur beim Dividieren). Man zeigt leicht, dass Addieren bzw. Multiplizieren und Konjugieren vertauschbare Operationen sind („erst Addieren bzw. Multiplizieren und dann Konjugieren ergibt dasselbe wie erst Konjugieren und dann Addieren bzw. Multiplizieren“), in der Formelsprache: $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ bzw. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

In der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen kann man uneingeschränkt alle vier Grundrechenarten ausführen und die bekannten Rechengesetze gelten weiterhin. Die Division durch Null ist und bleibt aus logischen Gründen verboten, da sie mit den übrigen Rechengesetzen kollidiert. Die neue Errungenschaft ist: In der Menge $\mathbb{C}$ kann man die Wurzel aus negativen reellen Zahlen ziehen und, wie wir später sehen, sogar uneingeschränkt aus allen komplexen Zahlen.

Das Symbol i

Das Konstrukt „Wurzel aus einer negativen Zahl“ ist den Mathematikern schon seit dem 16. Jahrhundert vertraut. Girolamo Cardano (1501–1576), ein berühmter Arzt und Universalgelehrter, schreibt in seinem Buch “Ars Magna sive de Regulis Algebraicis,” in dem er u.a. das Lösen quadratischer Gleichungen behandelt: “*Wenn jemand sagt: teile 10 in zwei Teile, deren Produkt (...) 40 ist, so ist klar, dass dieser Fall unmöglich ist.*“ Dessen ungeachtet rechnet Cardano und gibt die beiden “Teile” an, nämlich $5+\sqrt{-15}$ und $5-\sqrt{-15}$; denn ihre Summe ist 10 und ihr Produkt ist nach dem dritten binomischen Lehrsatz 40. Mit Wurzeln aus negativen Zahlen zu rechnen ist ungewöhnlich und suspekt in einer Zeit, in der man selbst negativen Zahlen noch mit Skepsis begegnete (da ihnen ein erkennbarer realer Bezug fehlt). Cardano nennt die Wurzel aus einer negativen Zahl *"quantitas sophistica"*, spitzfindige Größe, und hält sie für eine unnütze Spielerei.

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) bezeichnet ein solches Konstrukt 1712 als *„eine feine und wunderbare Zuflucht des menschlichen Geistes, ein Monstrum der idealen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein.“*

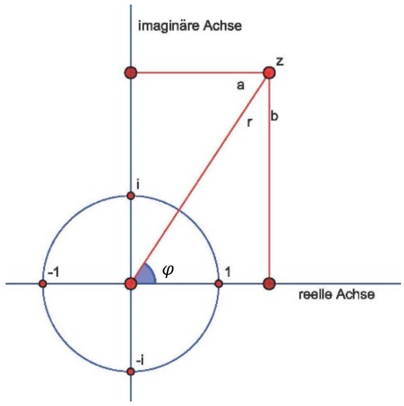
René Descartes (1667 - 1754) vermutet, dass eine Gleichung n-ten Grades immer n Lösungen hat, wenn man die mehrfachen Lösungen entsprechend oft zählt. (Die Vermutung ist als "Fundamentalsatz der Algebra" bekannt (vgl Kapitel i.5)) Allerdings seien diese Lösungen nicht immer reell, sondern manchmal *"seulement imaginaires",* nur vorgestellt. Daher kommt wohl die Bezeichnung "imaginäre Zahlen".

Im Laufe des 18. Jahrhunderts freunden sich die Mathematiker zunehmend mit den neuen Zahlen an. Leonhard Euler (1707–1783) führt 1777 den Buchstaben i für $\sqrt{-1}$ ein, ohne ihn allerdings durchgängig zu benutzen.

Allgemeine Verbreitung findet das neue Symbol durch Carl Friedrich Gauß (1777–1855), der auch die Bezeichnung „komplexe Zahl“ einführt. Er beschreibt noch 1831 die Haltung der meisten Mathematiker den komplexen Zahlen gegenüber sehr prägnant: *„… allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären – ehemals, und hin und wieder noch jetzt, obwohl unschicklich, unmögliche genannt – sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen.*“ [Ebbinghaus et al. 50]

Im Laufe des 19. Jahrhunderts werden die Zahlbereichserweiterungen auf eine formale Basis gestellt, so dass Leopold Kronecker (1823–1891) am Ende des Jahrhunderts feststellt: „*Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.*“

i.3 Gaußsche Zahlenebene



Es gibt einen Preis für den Fortschritt, den wir mit der Erweiterung der reellen zu den komplexen Zahlen erzielt haben. Der Preis ist der Verlust der Ordnung. Anschaulich lässt sich der Beweis so führen: Ließen sich die komplexen Zahlen anordnen wie die reellen, dann müsste auch die Zahl i einen Platz zwischen den reellen Zahlen auf der Zahlengeraden finden. Da sie nicht Null ist, müsste sie entweder positiv oder negativ sein. Aber sowohl das Quadrat einer positiven Zahl als auch das Quadrat einer negativen Zahl ist positiv, das Quadrat von i dagegen negativ. Widerspruch!

Ein formaler Beweis könnte so gehen: Würde man die Kleiner- bzw. Größer-Relation samt Rechenregeln auf $\mathbb{C}$ übertragen können, dann müsste (nach dem Trichotomie-Gesetz) die imaginäre Einheit i entweder größer oder kleiner als Null sein, da sie nicht Null ist. Aus $i > 0$ würde nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation $i \cdot i > i \cdot 0 = 0$, also $-1 > 0$ folgen; Widerspruch. Aus $i < 0$ würde nach dem Monotoniegesetz der Addition $-i > 0$ folgen. Nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation hätte das $(-i) \cdot (-i) > (-i) \cdot 0 = 0$, also $-1 > 0$ zur Folge; ebenfalls Widerspruch.

Fazit: Die Kleiner- bzw. Größer-Relation lässt sich nicht unter Erhalt der bekannten Rechenregeln im Umgang mit Ungleichungen (Monotoniegesetze) auf $\mathbb{C}$ übertragen. Man kann die komplexen Zahlen nicht linear auf einer Zahlengeraden anordnen.

Aber die komplexen Zahlen können als Punkte in der Ebene mit Hilfe eines rechtwinkligen Koordinatensystems dargestellt werden. Diese Darstellung nennt man nach Carl Friedrich Gauß die Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene. Dabei werden auf der waagerechten Achse die reellen Zahlen (reelle Achse) und auf der dazu senkrechten Achse die imaginären Zahlen (imaginäre Achse) in gewohnter Weise notiert. Der komplexen Zahl $z = a + b \cdot i$ entspricht also der Punkt mit den **kartesischen Koordinaten** (a,b), wobei a der Realteil und b der Imaginärteil von z ist. Die imaginäre Einheit hat also die kartesischen Koordinaten (0,1). Die reelle Zahl 1 hat, als komplexe Zahl aufgefasst, die kartesischen Koordinaten (1,0).

Diese Darstellung legt nahe, sich den Punkt z auch als Ortsvektor vorzustellen, der vom Ursprung des Koordinatensystems zum Punkt z geht.

Tatsächlich entspricht die **Addition** komplexer Zahlen der Vektoraddition, formal wie anschaulich. Komplexe Zahlen werden addiert, indem man Realteil und Imaginärteil jeweils einzeln addiert. Vektoren werden formal addiert, indem man die einzelnen Komponenten addiert. Anschaulich bedeutet das, dass man die Ortsvektoren aneinander legt, Schaft an Pfeil.

Die Analogie zur Vektorrechnung findet aber ihre Grenzen bei der **Multiplikation**. Bei Vektoren gibt es zwei Sorten von Multiplikation und keine passt für die Analogiebildung. Die eine ist das sogenannte Skalarprodukt: Das Produkt zweier ebener Vektoren ist ein Skalar, eine reelle Zahl, und kein Vektor; das Produkt zweier komplexer Zahlen ist aber eine komplexe Zahl, deren Imaginärteil durchaus von Null verschieden sein kann.
Bei der anderen Sorte multipliziert man einen Vektor (a,b) mit einem Skalar, einer reellen Zahl r, und erhält wieder einen Vektor: $r \cdot (a, b) = (r \cdot a, r \cdot b)$; bei einem positiven Skalar bedeutet das anschaulich eine Streckung (r>1) oder Stauchung (r<1) des Vektors; die Multiplikation mit r = -1 bedeutet eine Drehung des Vektors um 180°.
Diese Vorstellung kann man auch auf die Multiplikation einer komplexen Zahl $(a + b \cdot i) = (a, b)$ mit einer reellen Zahl r übertragen; denn $r \cdot (a + b \cdot i) = (r \cdot a) + (r \cdot b) \cdot i = (r \cdot a, r \cdot b)$. Multipliziert man dagegen die komplexe Zahl $(a + b \cdot i) = (a, b)$ mit der imaginären Einheit i, erhält man die komplexe Zahl $(-b + a \cdot i) = (-b, a)$. Das bedeutet in der Vektorinterpretation: Der Vektor (a,b) wird bei Multiplikation mit i um 90° gedreht.

Fügt man alle anschaulichen Deutungen zusammen – Multiplizieren einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl bedeutet Strecken oder Stauchen, Multiplizieren mit der imaginären Einheit bedeutet Drehen um 90°, Addieren zweier komplexer Zahlen bedeutet Hintereinanderlegen –,dann entwickelt sich eine (zugegeben noch etwas komplizierte) anschauliche Interpretation vom Multiplizieren einer komplexen Zahl mit einer anderen komplexen Zahl.

Klarer wird sie, wenn wir neben den kartesischen Koordinaten eine andere Darstellung der Punkte in der Gaußschen Zahlenebene wählen, nämlich die Darstellung in **Polarkoordinaten**. Ein Punkt in der Zahlenebene kann durch den Abstand r vom Ursprung des Koordinatensystems und den Winkel φ, den der Ortsvektor mit der positiven reellen Achse bildet, beschrieben werden. Um Eindeutigkeit zu erhalten, legen wir fest: $0 \leq \varphi < 2\pi$. Das Zahlenpaar (r,φ) nennt man die Polarkoordinaten der komplexen Zahl z. Der Abstand r heißt auch (Absolut-)Betrag der komplexen Zahl z; man bezeichnet den Winkel φ auch als Argument der komplexen Zahl z: in Symbolen $r = |z|$ und $\varphi = \arg z$.
Der Satz des Pythagoras und die Trigonometrie liefern den

Zusammenhang zwischen den Polarkoordinaten (r,φ) und den kartesischen Koordinaten (a,b):

$$r^2 = a^2 + b^2 = z \cdot \bar{z} \qquad a = r \cdot \cos\varphi \qquad b = r \cdot \sin\varphi \qquad \text{also:} \quad z = a + b \cdot i = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Mit Hilfe der Polarkoordinaten gelingt die anschauliche Deutung der Multiplikation komplexer Zahlen. Nach den bekannten Regeln des Multiplizierens ergibt sich für das Produkt zweier beliebiger komplexer Zahlen $z_1 = r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)$ und $z_2 = r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)$:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2) + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 \cdot \cos\varphi_1))$$

Die Additionstheoreme (Kap.π.6)helfen, hieraus eine prägnante Formel zu machen:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \qquad \text{(Multiplizieren in Polarkoordinaten)}$$

In Worten: Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel. Anschaulich wird der Ortsvektor (r_1,φ_1) um den Betrag r_2 gestreckt oder gestaucht und um den Winkel φ_2 gedreht. In der Geometrie heißt eine solche Abbildung Drehstreckung.

Bei der Addition von Winkeln, die zwischen 0 und 2π liegen, kann die Summe $\varphi_1 + \varphi_2 = \varphi'$ größer als der Vollwinkel sein. Wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen liefern Sinus und Kosinus dann für φ' dieselben Werte wie für $\varphi' - 2\pi = \varphi$, d.h. die Polarkoordinaten (r,φ') und (r,φ) bezeichnen denselben Punkt in der Zahlenebene. Allgemein gilt: Die Polarkoordinaten (r,φ') und (r,φ) bezeichnen denselben Punkt in der Zahlenebene, wenn sich φ' und φ sich um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden.

i.4 Potenzieren und Wurzelziehen

In allen Zahlbereichen – von den natürlichen Zahlen über die rationalen und reellen Zahlen bis hin zu den komplexen Zahlen – gilt: Wenn man multiplizieren kann, dann kann man auch potenzieren, denn die Potenz z^n wird eingeführt als Abkürzung für das n-fache Produkt des Faktors z; das macht allerdings nur Sinn für natürliche Zahlen als Exponenten ($n \geq 1$), wobei z^1 gleich z gesetzt wird.

Für komplexe Zahlen haben wir mit Hilfe der Polarkoordinaten eine anschauliche Deutung der Multiplikation kennengelernt: Multiplikation zweier komplexer Zahlen bedeutet Multiplikation der Beträge und Addition der Winkel. Also gilt für die n-te Potenz der komplexen Zahl $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

$z^n = r^n \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$ (Potenzieren in Polarkoordinaten).

In Worten: Potenzieren einer komplexen Zahl mit einer natürlichen Zahl n bedeutet Potenzieren des Betrags und Vervielfachen des Winkels.
Der Winkel $n \cdot \varphi$ kann größer als der Vollwinkel sein; dann identifizieren wir ihn mit dem Winkel φ‘, der zwischen 0 und 2π liegt und sich von $n \cdot \varphi$ um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheidet.

Als Spezialfall der Formel $r^n \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = r^n \cdot (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$ erhält man für komplexe Zahlen auf dem Einheitskreis, d.h. für $r = 1$ die Moivreschen Formeln:

$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = (\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi))$ (Abraham de Moivre 1667-1754)

Links steht ein Binom; rechnet man es aus, ordnet man die Summe nach Realteil und Imaginärteil und nutzt man die Beziehung $(\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$ aus, dann kann man $\cos(n \cdot \varphi)$ nur durch Potenzen von $\cos\varphi$ sowie $\sin(n \cdot \varphi)$durch Potenzen von $\sin\varphi$ ausdrücken.

Beispiel: $n = 3$

$$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^3 = ((\cos\varphi)^3 - 3 \cdot \cos\varphi \cdot (\sin\varphi)^2) + i \cdot (3 \cdot (\cos\varphi)^2 \cdot \sin\varphi - (\sin\varphi)^3)$$
$$= (4 \cdot (\cos\varphi)^3 - \cos\varphi) + i \cdot (\sin\varphi - 4 \cdot (\sin\varphi)^3)$$

Der Vergleich mit $(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^3 = (\cos(3\varphi) + i \cdot \sin(3\varphi))$ liefert:
$\cos(3\varphi) = 4 \cdot (\cos\varphi)^3 - \cos\varphi$ und $\sin(3\varphi) = \sin\varphi - 4 \cdot (\sin\varphi)^3$

Mit diesen Formeln kann man zum Beispiel die Werte von cos 20° und von sin 10° berechnen, da die Werte für den dreifachen Winkel bekannt sind: $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$. Setzen wir $x = \cos 20°$, dann gilt $\frac{1}{2} = 4 \cdot x^3 - x$. Zur Lösung solcher Gleichungen gibt es zwar kein Standardverfahren, das man in der Schule lernt. Gerolamo Cardano (1501 - 1576) hat allerdings schon eine allgemeine Formel hierfür veröffentlicht.

Die Umkehrung des Potenzierens ist das Wurzelziehen. Für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ definiert man als **n-te Wurzel aus a** eine Zahl z, die, n-mal als Faktor gesetzt, das Produkt a ergibt. in Formelschreibweise:

$$z = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow z^n = a$$

Die Zahl a nennt man auch Radikand oder Wurzelbasis und die natürliche Zahl n Wurzelexponent.

Von den reellen Zahlen ist bekannt, dass beim Wurzelziehen besondere Bedingungen herrschen:

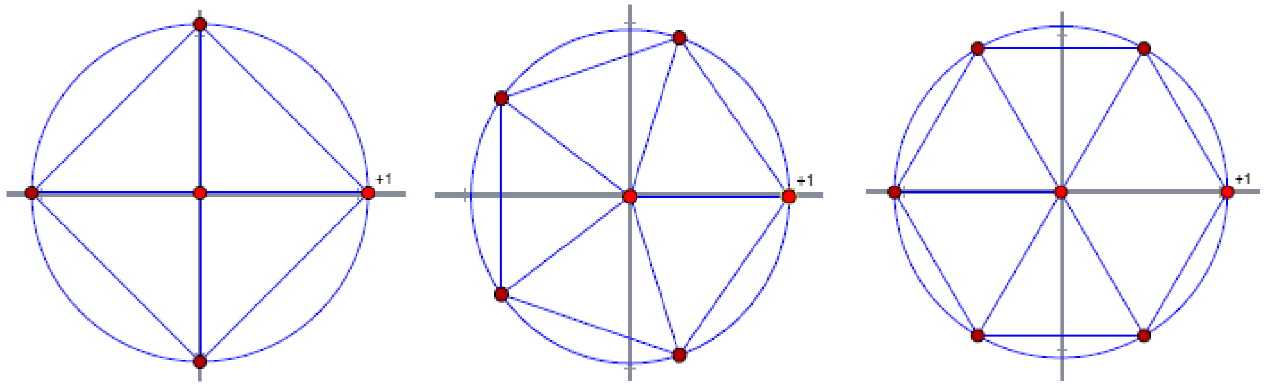
- Für ungerade Wurzelexponenten n existiert zu jeder Zahl a immer genau eine reelle n-te Wurzel; ist a positiv, ist auch die n-te Wurzel aus a positiv; ist a negativ, ist auch die n-te Wurzel aus a negativ.
- Für gerade Wurzelexponenten n existiert nur dann eine reelle Zahl als Wurzel aus a, wenn a nicht negativ ist. Dass es für negative Radikanden keine reellen Quadratwurzeln gibt, war ja gerade der Anlass dafür, die komplexen Zahlen einzuführen. Für positive Radikanden a gibt es genau zwei n-te Wurzeln aus a, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

Die Definition der n-ten Wurzel kann auch auf komplexe Zahlen übertragen werden. Für eine komplexe Zahl a und eine natürliche Zahl n bedeutet $\sqrt[n]{a} = z$ also: Suche diejenigen Zahlen z, für die $z^n = a$ gilt.
Wir heben vorsichtshalber von Zahlen in der Mehrzahl gesprochen, da wir ja von den reellen Zahlen wissen, dass es mehr als eine geben kann.

Wir betrachten zunächst den Sonderfall $a = 1$: man spricht hier auch von den **n-ten Einheitswurzeln**. Aus $z^n = |z|^n \cdot (\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)^n = |z|^n \cdot (\cos(n\cdot\varphi) + i\cdot\sin(n\cdot\varphi))$ und $z^n = 1$ folgt, dass alle Einheitswurzeln den Betrag 1 haben: Sie liegen auf dem Einheitskreis.

Wie groß ist das Argument φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ von $\sqrt[n]{1} = z$? Das Argument von 1 ist 0. Aus der anschaulichen Interpretation der Multiplikation als Drehstreckung folgt, dass das n-fache des Winkels φ gleich 0 oder gleich einem Vielfachen des Vollwinkels 2π sein muss; wegen $\varphi < 2\pi$ muss also $n\cdot\varphi < 2\pi\cdot n$ gelten, also $n\cdot\varphi = 2\pi\cdot k$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$. Demnach gibt es n verschiedene solcher Winkel $\varphi_k = \frac{2\pi}{n}\cdot k$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$ und folglich n verschiedene n-te Einheitswurzeln.

In den folgenden drei Abbildungen sind die vierten, fünften und sechsten Einheitswurzeln in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. In der Zahlenebene liegen die Einheitswurzeln auf dem Einheitskreis und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks mit der Ecke +1 auf der reellen Achse. Für ungerades n ist +1 die einzige reelle Einheitswurzel, es gibt darüber hinaus noch n–1 komplexe Einheitswurzeln. Für gerades n sind +1 und –1 die reellen Einheitswurzeln. Alle Einheitswurzeln liegen symmetrisch zur reellen Achse, d.h. mit jeder Einheitswurzel ist auch die dazu konjugierte Zahl eine Einheitswurzel.



Die Einführung der komplexen Zahlen löst die Unterscheidung hinsichtlich der Anzahl von Ergebnissen beim Wurzelziehen von reellen Zahlen in gewisser Weise auf: die Suche nach den n-ten Einheitswurzeln führt immer zu n Ergebnissen. Man kann diese Überlegungen auf beliebige Radikanden a übertragen.

Betrachten wir zunächst den Fall $a = -1$. Hier existiert in der Welt der reellen Zahlen nur dann eine n-te Wurzel, wenn n ungerade ist. Wie sieht das im komplexen Fall aus? Da $z^n = -1$ auf dem Einheitskreis liegt, müssen auch alle n-ten Wurzeln aus –1 den Betrag 1 haben, d.h. auf dem Einheitskreis liegen.
Wie groß ist das Argument φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ von $\sqrt[n]{-1} = z$? Das Argument von –1 ist 180° bzw. π. Aus der anschaulichen Interpretation der Multiplikation als Drehstreckung folgt, dass das n-fache des Winkels φ gleich π oder gleich der Summe aus π und einem Vielfachen des Vollwinkels sein muss:
$n\cdot\varphi = \pi + 2\pi\cdot k = (2k+1)\cdot\pi$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$.
Demnach gibt es n verschiedene solcher Winkel $\varphi_k = \frac{\pi}{n}+\frac{2\pi}{n}\cdot k = \frac{2k+1}{n}\cdot\pi$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$.
Anschaulich: Die n-ten Wurzeln aus –1 liegen auf dem Einheitskreis. Man erhält sie, indem man die n-ten Einheitswurzeln um $\frac{\pi}{n}$ dreht. Wenn n gerade ist, liegt keine dieser n-ten Wurzeln auf der reellen Achse. Das entspricht dem „Verbot", aus negativen Zahlen gerade Wurzeln zu ziehen, solange man noch keine komplexen Zahlen kannte. Wenn n ungerade $(n = 2m+1)$ ist, erhält man $\varphi_m = \pi$, wenn man $k = m$ einsetzt. Also liegt genau eine dieser n-ten Wurzeln auf der reellen Achse, nämlich bei $z = -1$.
Die Einführung der komplexen Zahlen löst somit die Ungleichbehandlung der n-ten Wurzeln von negativen Radikanden bei geradem und ungeradem n und auf bzw. klärt sie.

Nun gehen wir einen Schritt weiter. Gibt es und was ist ggf. $\sqrt[n]{i}$?
Da $z^n = i$ auf dem Einheitskreis liegt, müssen auch alle n-ten Wurzeln aus i den Betrag 1 haben, d.h. auf dem Einheitskreis liegen. Wie groß ist das Argument φ $(0 \le \varphi < 2\pi)$ von $\sqrt[n]{i}$? Das Argument von i ist 90° bzw. $\frac{\pi}{2}$. Aus der anschaulichen Interpretation der Multiplikation als Drehstreckung folgt, dass das n-fache des Winkels φ gleich $\frac{\pi}{2}$ oder gleich der Summe aus $\frac{\pi}{2}$ und einem Vielfachen des Vollwinkels sein muss:
$n\cdot\varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi\cdot k = \frac{4k+1}{2}\cdot\pi$ mit $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Demnach gibt es n verschiedene solcher Winkel $\varphi_k = \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k = \frac{4k+1}{2n} \cdot \pi$ mit $0 \leq k < n$.
Anschaulich: Die n-ten Wurzeln aus i liegen auf dem Einheitskreis. Man erhält sie, indem man die n-ten Einheitswurzeln um $\frac{\pi}{2n}$ dreht. Keine dieser n-ten Wurzeln kann auf der reellen Achse liegen (warum?).

Wir haben gesehen, wie man n-te Wurzeln aus komplexen Zahlen zieht, die auf dem Einheitskreis liegen. Wie sieht es mit den n-ten Wurzeln einer beliebigen komplexen Zahl $a = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ mit $0 \leq \alpha < 2\pi$ aus? Durch Variation der obigen Überlegungen erhält man:

Es gibt genau n verschiedene n-te Wurzeln. Alle haben den gleichen Betrag $\sqrt[n]{r}$, wobei die positive n-te Wurzel aus der Betrag von a gemeint ist. Das n-fache des Winkels φ ist gleich α oder gleich α plus einem Vielfachen des Vollwinkels 2π; wegen $\varphi < 2\pi$ muss also $n \cdot \varphi = \alpha + 2\pi \cdot k < 2\pi \cdot n$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$ gelten. Es gibt also n verschiedene n-te Wurzeln mit den Winkeln $\varphi_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$, man erhält, indem man den n-ten Teil des Winkels α entsprechend oft um den n-ten Teil des Vollwinkels dreht.

Fassen wir noch einmal zusammen: Jede komplexe Zahl z kann mit einem natürlichen Exponenten n potenziert werden und das Ergebnis ist eine eindeutig bestimmte komplexe Zahl, die Potenz z^n.
Aus jeder komplexen Zahl a kann die n-te Wurzel $\sqrt[n]{a}$ ($n \in \mathbb{N}$) gezogen werden. Sie ist eine Lösung der Gleichung $z^n = a$. Außer im Fall $a = 0$ gibt es n verschiedene Lösungen dieser Gleichung. Wurzelziehen ist also im Allgemeinen mehrdeutig.

i.5 Fundamentalsatz der Algebra

Die n-ten Einheitswurzeln erfüllen die Gleichung $z^n - 1 = 0$. Eine spezielle Lösung ist $z_1 = 1$. Nun gilt: $z^n - 1 = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1)$ (Beweis durch Polynomdivision oder durch Ausmultiplizieren). Die übrigen Einheitswurzeln $z_2, z_3, \ldots, z_n$ sind also Lösungen der Gleichung $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$. Diese Gleichung heißt auch Kreisteilungsgleichung, weil ihre Lösungen zusammen mit $z_1 = 1$ den Einheitskreis in n gleichgroße Abschnitte teilt, wie wir oben gesehen haben. Wir halten fest: Die Gleichung $z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1 = 0$ hat genau $n-1$ verschiedene Lösungen.

Verallgemeinerung:
Im Folgenden sind die Koeffizienten a_i komplexe Zahlen und z ist eine komplexe Variable.

- Der Term $a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ heißt **Polynom n-ten Grades.**
- Eine Gleichung der Form $a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$ mit $a_n \neq 0$ heißt **algebraische Gleichung n-ten Grades.**
- Die durch die Funktionsgleichung $f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$ mit $a_n \neq 0$ beschriebene Funktion mit dem Definitions- und Wertebereich $\mathbb{C}$ heißt **komplexe Polynomfunktion n-ten Grades.**

Die Lösungen der algebraischen Gleichung sind die Nullstellen der Polynomfunktion und umgekehrt.

Algebraische Gleichungen 2. Grades mit reellen Koeffizienten (quadratische Gleichungen) in der Menge der reellen Zahlen zu lösen bzw. die Nullstellen von reellen quadratischen Funktionen zu bestimmen, lernt man in der Schule. Der Funktionsgraph macht plausibel, was die Arithmetik ergibt: Die Parabel schneidet die x-Achse kein- ein- oder zweimal; die Funktion hat keine, eine oder zwei Nullstellen, wobei man im Falle einer Nullstelle von einer doppelten Nullstelle spricht. Die quadratische Gleichung hat keine, eine oder zwei reelle Lösungen. Im Falle keiner reellen Lösung liegt das daran, dass die Wurzel einer negativen reellen Zahl zu ziehen ist, was zu zwei konjugiert komplexen Zahlen mit einem von Null verschiedenen Imaginärteil führt.
Genau wie im Reellen zeigt man durch Äquivalenzumformungen und mit Hilfe der Aussagen über Quadratwurzeln aus komplexen Zahlen (Kap. i.3), dass die quadratische Gleichung $z^2 + pz + q = 0$ mit komplexen Koeffizienten p und q genau zwei Lösungen hat, die unter gewissen Umständen zusammenfallen können.
Lösungen für Gleichungen 3. und 4. Grades mit reellen Koeffizienten wurden durch (komplizierte) Formeln im 16. Jahrhundert angegeben (Tartaglia, Cardano). Bemühungen um eine Lösung der allgemeinen Gleichung 5. Grades scheiterten bis zum Ende des 18. Jahrhunderts.

1799 bewies Carl Friedrich Gauß (1777-1855) in seiner Doktorarbeit, ohne eine Formel anzugeben, dass jede algebraische Gleichung vom Grad ≥ 1 mindestens eine komplexe Lösung hat (Satz von Gauß). Beachte: Eine komplexe Lösung kann auch den Imaginärteil Null haben, also reell sein.

(Quelle: wikipedia)

Carl Friedrich Gauß, 1777 in Braunschweig geboren, sagte von sich selbst, er habe eher rechnen als sprechen gelernt. Berühmt ist die Anekdote vom „kleinen Gauß“: In der mit 100 Schülern überfüllten Schulstube stellte der Lehrer die Aufgabe, alle Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Nach kürzester Zeit lieferte der kleine Carl Friedrich das richtige Ergebnis: 5050. Er hatte die Summe in 50 Zahlenpaare mit der gleichen Summe 101 zerlegt (1 + 100, 2 + 99, 3 + 98 und so weiter). Gauß‘ Talent wurde schon früh entdeckt und gefördert. 1807 wurde er Professor in Göttingen und Direktor der dortigen Sternwarte. Dort musste er Lehrveranstaltungen halten, gegen die er aber eine Abneigung entwickelte. Er blieb Göttingen zeitlebens treu und trug wesentlich zum wachsenden Ruf seiner Universität bei. Bereits ein Jahr nach seinem Tod 1855 ließ der König von Hannover Gedenkmünzen mit dem Bild von Gauß und der Inschrift „Mathematicorum Principi“ („dem Fürsten der Mathematiker“) prägen.

Gauß gehört zu den größten Mathematikern aller Zeiten, hat aber wie Archimedes, Newton und andere auch in anderen Disziplinen Bahnbrechendes geleistet. Er veröffentlichte seine Ergebnisse erst, wenn eine Theorie seiner Meinung nach komplett war. „Pauca sed matura“ („Weniges, aber Reifes“) stand auf seinem Siegel. Das führte dazu, dass er Kollegen gelegentlich darauf hinwies, dieses oder jenes Resultat schon lange bewiesen zu haben, es wegen der Unvollständigkeit der zugrundeliegenden Theorie oder der ihm fehlenden, zum schnellen Arbeiten nötigen Unbekümmertheit nur noch nicht präsentiert zu haben. Den Beleg für diese Behauptung lieferten seine über 20 Tagebücher, die erst 1898 entdeckt wurden.

Der Satz von Gauß wird oft schon als Fundamentalsatz der Algebra bezeichnet, da er der schwieriger zu beweisende Teil der folgenden Verallgemeinerung ist, die wir auf drei äquivalente Weisen formulieren:

Fundamentalsatz der Algebra:
1. Formulierung:
Eine algebraische Gleichung n-ten Grades $a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0 = 0$ mit komplexen Koeffizienten a_i (mit $a_n \neq 0$) hat genau n komplexe Lösungen; dabei muss jede Lösung entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

2. Formulierung:
Eine Polynomfunktion n-ten Grades $f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$ mit komplexen Koeffizienten a_i (mit $a_n \neq 0$) hat genau n komplexe Nullstellen; dabei muss jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt werden.

3. Formulierung:
Jedes Polynom n-ten Grades $a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$ $(a_n \neq 0)$ mit komplexen Koeffizienten a_i kann als Produkt von n Linearfaktoren $a_n \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_3) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$ geschrieben werden, wobei die komplexen Zahlen z_i die Nullstellen der Polynomfunktion bzw. die Lösungen der algebraischen Gleichung sind; dabei muss jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit vorkommen.

Die Einheitswurzeln sind die Lösungen der Polynomfunktion $f(z) = z^n - 1$. Wir haben gesehen: Alle Einheitswurzeln liegen symmetrisch zur reellen Achse, d.h. mit jeder Einheitswurzel ist auch die dazu konjugierte Zahl eine Einheitswurzel. Das gilt auch allgemein: Sind die Koeffizienten a_i der Polynom funktion $f(z) = a_n \cdot z^n + a_{n-1} \cdot z^{n-1} + a_{n-2} \cdot z^{n-2} + \ldots + a_1 \cdot z + a_0$ reelle Zahlen, dann ist mit der Nullstelle $z_1 = x_1 + iy_1$ auch die konjugierte Zahl $\overline{z_1} = x_1 - iy_1$ eine Nullstelle. Das ergibt sich aus der Beziehung $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$; denn mit $f(z_1) = 0$ ist auch $\overline{f(z_1)} = 0$ und folglich $f(\overline{z_1}) = 0$. Die Beziehung $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ ist eine Folgerung aus der Tatsache, dass f(z) durch Addieren komplexer Potenzen, multipliziert mit reellen Koeffizienten, entsteht und bei komplexen Zahlen Addieren bzw. Potenzieren und Konjugieren vertauschbare Operationen sind (Kap. i.1).

Ist bewiesen, dass jede algebraische Gleichung n-ten Grades eine Lösung bzw. jede Polynomfunktion n-ten Grades eine Nullstelle hat, dann folgt die Verallgemeinerung durch vollständige Induktion.

Aus dem Fundamentalsatz der Algebra ergeben sich einige einfache, aber wichtige Folgerungen.

Bei Polynomfunktionen mit reellen Koeffizienten treten Nullstellen mit von Null verschiedenem Imaginärteil also immer paarweise auf, das heißt, die Anzahl der komplexen Nullstellen mit von Null verschiedenem Imaginärteil ist gerade. Daraus kann man weiter folgern: Wenn eine Polynomfunktion mit reellen Koeffizienten einen ungeraden Grad hat, dann muss sie mindestens eine reelle Nullstelle besitzen.

Eine weitere einfache Folgerung aus dem Fundamentalsatz der Algebra ist: Zwei Polynomfunktionen verschiedenen Grades können nicht gleich sein. Zwei Funktionen sind gleich, wenn die Funktionswerte an allen Stellen ihres Definitionsbereichs übereinstimmen. Zwei Polynomfunktionen verschiedenen Grades stimmen aber nicht in ihren Nullstellen überein.

Wir werden den Fundamentalsatz der Algebra auch noch im Abschlusskapitel benutzen, um damit faszinierende Formeln für π herzuleiten.

Ausblick

Wir haben gesehen, wie die „Störungen des Rechnens“ dazu führen, immer neue Zahlbereiche zu erfinden. Will man darin „ungestört“ rechnen, muss man die alten Rechenoperationen durch Begriffserweiterung unter Beibehaltung der alten Rechengesetze (Permanenzprinzip), soweit dies möglich ist, auf die neuen Zahlbereiche übertragen.

Unter „Rechnen“ kann man letztlich das Lösen von algebraischen Gleichungen verstehen. Bei den komplexen Zahlen ist man schließlich im gelobten Land des Rechnens angekommen: Jede algebraische Gleichung vom Grad ≥ 1 hat mindestens eine komplexe Lösung (Satz von Gauß). Man nennt diese Eigenschaft der Menge der komplexen Zahlen auch algebraische Abgeschlossenheit. Genauer gilt sogar: Jede algebraische Gleichung vom Grad ≥ 1 hat n Lösungen, wobei einige gegebenenfalls mehrfach gezählt werden müssen.

Lösungen einer algebraischen Gleichung vom Grad $n \geq 2$ und n-te Wurzeln sind zwei Seiten derselben Medaille. So können wir in den komplexen Zahlen „ungestört“ n-te Wurzeln ziehen.
Wurzeln aus komplexen Zahlen zu ziehen, ist nicht das Problem, wie wir gesehen haben: Wer mit natürlichen Exponenten potenzieren kann – und das geht überall, wo man multiplizieren kann –, kann auch die Umkehrfrage stellen. Sie führt in der Welt der komplexen Zahlen immer zu Lösungen, genauer zu: sie führt zu einer Lösungsmenge mit mehreren Elementen (falls der Radikand nicht Null ist).

In der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ ist die Basis e der Potenz $e^{i\pi}$ eine positive reelle Zahl, aber der Exponent eine imaginäre Zahl. Wir wissen noch nicht einmal, was es heißt, mit einem Bruch zu potenzieren, geschweige denn mit einer imaginären Zahl. Wir müssen also noch den Potenzbegriff erweitern, um dem Geheimnis der Formel näher zu kommen.

Kapitel e: Exponentialfunktionen

Ausgangspunkt des Kapitels i war die Erweiterung des Zahlbegriffs von den natürlichen über die reellen bis zu den komplexen Zahlen. Mit den Zahlbereichserweiterungen einher geht die Begriffserweiterung der Rechenoperationen; für die neuen Zahlen müssen Addition und Subtraktion sowie Multiplikation und Division definiert werden. Leitidee ist dabei das Permanenzprinzip: Die für die bekannten Zahlen gültigen Rechenregeln sollen auch für die neuen Zahlen gelten. Nach Möglichkeit! (Dass das nicht immer geht, mussten wir auch feststellen: Die Kleiner-Relation lässt sich nicht so übertragen, dass die bekannten Regeln für Ungleichungen erhalten bleiben. Wir haben das den Verlust der Ordnung genannt.)

Wir wenden uns nun der Erweiterung des Potenzierens zu. Bei ganzzahligen Exponenten geht das reibungslos. Bei rationalen Exponenten stoßen wir auf Probleme, wenn wir eine negative reelle Basis zulassen. Beschränken wir uns auf positive reelle Zahlen als Basis, können wir den Potenzbegriff auf beliebige reelle Exponenten erweitern.

Damit ist die Grundlage gelegt für einen wichtigen Perspektivwechsel: Wir können Funktionen betrachten, die bei einer fest vorgegebenen positiven reellen Basis q jedem reellen Exponenten x die zugehörige Potenz q^x zuordnen. Sie heißen Exponentialfunktionen. Eine besondere unter ihnen ist die Exponentialfunktion zur Basis e, die e-Funktion.

Das Besondere an der Betrachtung von Funktionen in diesem Kapitel ist allerdings, dass wir nicht von einer Funktionsvorschrift ausgehen, die jedem Argument x den Funktionswert f(x) zuordnet, und dann Eigenschaften der so definierten Funktion untersuchen, sondern dass wir Exponentialfunktionen als Funktionen mit speziellen Eigenschaften charakterisieren und aus diesen Eigenschaften die Funktionsvorschrift herleiten, und zwar nicht nur eine, sondern gleich mehrere äquivalente.

e.1 Erweiterung des Potenzbegriffs

In allen Zahlbereichen – von den natürlichen Zahlen über die rationalen und reellen Zahlen bis hin zu den komplexen Zahlen – gilt: Wenn man multiplizieren kann, dann kann man auch potenzieren, denn die Potenz z^n wird eingeführt als Abkürzung für das n-fache Produkt des Faktors z; das macht allerdings nur Sinn für natürliche Zahlen als Exponenten ($n \geq 1$), wobei z^1 gleich z gesetzt wird.

Aus der Definition des Potenzierens ergeben sich die **Potenzgesetze** für natürliche Zahlen als Exponenten mit Hilfe der üblichen Rechenregeln für die Grundrechenarten. Das Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis ist das wichtigste von allen: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert. $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ (PG1)

Es ist typisch für Begriffserweiterungen in der Mathematik, dass man danach fragt, ob man Einschränkungen, die sich aus der ursprünglichen Definition ergeben (im vorliegenden Fall die Einschränkung, dass der Exponent eine natürliche Zahl sein muss), fallen lassen kann. Das bedeutet, dass man die zugrunde liegende intuitive Vorstellung des Potenzierens als wiederholtes Multiplizieren aufgeben muss. Denn was soll schon z^0 bedeuten? Eine Erweiterung soll allerdings nach dem **Permanenzprinzip** erfolgen, d.h. die bisherigen Rechenregeln sollen möglichst ausnahmslos weiter gelten.

Soll das Potenzgesetz $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ seine Gültigkeit auch für n = 0 behalten – was ja auf der rechten Seite Sinn macht –, dann folgt $z^m \cdot z^0 = z^m$. Dividieren wir beide Seite durch z^m, ergibt sich $z^0 = 1$. Das Permanenzprinzip hat also zur Folge, dass wir zwangsläufig definieren müssen: $z^0 = 1$.
Achtung: wir haben bei der Herleitung durch z^m dividiert; das geht nur, wenn z^m, also auch z von Null verschieden ist: 0^0 bleibt undefiniert. Es gilt also $z^0 = 1$ für alle $z \neq 0$.

Das Potenzgesetz $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$ legt auch die **Erweiterung des Potenzbegriffs auf ganze Zahlen als Exponenten** nahe. Denn für $n = -m$, $m \in \mathbb{N}$, ergibt sich $z^m \cdot z^{-m} = z^0 = 1$. Also ist z^{-m} der Kehrwert von z^m, wieder für jede von Null verschiedene Basis z.

Es macht also ab sofort Sinn, bei beliebiger (reeller oder komplexer) Basis (außer im Sonderfall Null) ganze Zahlen als Exponenten zuzulassen; der Sonderfall ergibt sich aus dem Verbot der Division durch Null. Wegen der auftretenden Kehrwerte setzt die Erweiterung des Potenzbegriffs auf negative ganze

Zahlen als Exponenten voraus, dass wir in der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen rechnen. Man bestätigt leicht, dass das Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis nun auch für beliebige ganze Zahlen als Exponenten gilt – immer mit der Einschränkung an die Basis z, dass eine Division durch Null ausgeschlossen bleibt.

Wenn man dieselbe Potenz wiederholt mit sich multipliziert, ergibt sich aus dem ersten Potenzgesetz das Potenzgesetz für das Potenzieren von Potenzen: Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert: $(z^m)^n = z^{m \cdot n}$ (PG2)

Mit der Einschränkung an die Basis z, dass eine Division durch Null ausgeschlossen bleibt, gilt auch dieses Potenzgesetz für beliebige ganze Zahlen als Exponenten.

Mit der gleichen Einschränkung an die Basen ergibt sich mit Hilfe der üblichen Rechenregeln für die Grundrechenarten auch das Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleichem ganzzahligem Exponenten: Erst potenzieren und dann multiplizieren, ergibt dasselbe wie erst multiplizieren und dann potenzieren: ${z_1}^n \cdot {z_2}^n = (z_1 \cdot z_2)^n$ (PG3)

Für die **Erweiterung des Potenzbegriffs auf rationale Zahlen als Exponenten** müssen wir noch einmal an den Zusammenhang zwischen Potenzieren und Wurzelziehen erinnern (Kap. i.3). Für eine (komplexe) Zahl a und eine natürliche Zahl n bedeutet $\sqrt[n]{a} = z$: Suche diejenigen Zahlen z, für die $z^n = a$ gilt.

Wir wollen nun dem Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ eine Bedeutung geben. Wenn (PG2) weiterhin gelten soll, ist $(a^{\frac{1}{n}})^n = a^1 = a$, also $a^{\frac{1}{n}}$ diejenige Zahl, die, mit n potenziert, a ergibt, also die n-te Wurzel aus a.
Die Basis der Potenz ist der Radikand der n-ten Wurzel. Im Allgemeinen ist die n-te Wurzel einer natürlichen oder rationalen Zahl keine rationale Zahl, so dass diese Erweiterung des Potenzbegriffs erst in der Welt der reellen Zahlen sinnvoll ist.

Dort tritt aber folgendes Dilemma auf: Während bei ungeradem n zu jeder reellen Zahl a genau eine reelle n-te Wurzel existiert, darf bei geradem n der Radikand a nicht negativ sein; denn es gibt keine reelle Zahl, die, mit einem geraden Exponenten potenziert, negativ wäre. Das führt im Zusammenhang mit den Potenzgesetzen zu Problemen.

1. Beispiel: Was ist $(-1)^{0,2}$? Welche der folgenden Antworten macht einen Fehler in der Argumentation?
   1. Antwort: $(-1)^{0,2} = (-1)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{-1} = -1$
   2. Antwort: $(-1)^{0,2} = (-1)^{\frac{2}{10}} = ((-1)^2)^{\frac{1}{10}} = 1^{\frac{1}{10}} = \sqrt[10]{1}$ Ergebnis: $+1$ oder -1
   3. Antwort: $(-1)^{0,2} = (-1)^{\frac{2}{10}} = \left((-1)^{\frac{1}{10}}\right)^2 = (\sqrt[10]{-1})^2$ Es gibt keine reelle Zahl $\sqrt[10]{-1}$, also kein Ergebnis.

2. Beispiel: Was ist $(-1)^{0,2}$? Was ist $(-1)^{0,4}$? Gibt man beide Aufgaben in den Taschenrechner ein, erhält man je nach Taschenrechner unterschiedliche, in jedem Fall aber irritierende Ausgaben, z.B. $(-1)^{0,2} = -1$ einerseits und $(-1)^{0,4}$ DOMAIN ERROR andererseits, obwohl doch nach dem Potenzgesetz für das Potenzieren von Potenzen $(-1)^{0,4} = ((-1)^{0,2})^2$ ist, also als Ergebnis 1 angezeigt werden müsste.

3. Beispiel: Nach dem Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis müsste gelten
   $(-1)^{\frac{1}{4}} \cdot (-1)^{\frac{1}{12}} = (-1)^{\frac{1}{3}}$ bzw. $\sqrt[4]{-1} \cdot \sqrt[12]{-1} = \sqrt[3]{-1}$
   Die 4. und die 12. Wurzel aus –1 existieren nicht im Reellen, die 3. Wurzel aus –1 ist jedoch –1; also kann die Gleichung nicht stimmen.

Wie sieht es aus, wenn wir uns mit dem Wurzelziehen in die Welt der komplexen Zahlen begeben? Auch nicht wirklich besser. Nehmen wir das 3. Beispiel. Wie wir in Kap. i.3 gesehen haben, gibt es vier komplexe Wurzeln $\sqrt[4]{-1}$, zwölf komplexe Wurzeln $\sqrt[12]{-1}$ und drei komplexe Wurzeln $\sqrt[3]{-1}$. Auf der linken Seite gibt es also 48 verschiedene mögliche Produkte. Alle komplexen Wurzeln aus –1 haben den Betrag 1. Eine mögliche vierte Wurzel aus –1 hat den Winkel $\frac{\pi}{4}$, eine mögliche zwölfte Wurzel aus –1 hat den Winkel $\frac{3 \cdot \pi}{12}$, das Produkt dieser beiden Wurzeln hat also den Winkel $\frac{\pi}{4} + \frac{3 \cdot \pi}{12} = \frac{\pi}{2}$. Das ist zwar eine Zahl auf dem Einheitskreis, aber keine dritte Wurzel aus –1. Wir werden im Kap. Finale noch einmal auf dieses Dilemma zu sprechen kommen.

Eine Möglichkeit, in der **Welt der reellen Zahlen** aus dem offensichtlichen Dilemma herauszukommen, ist die „par force"-Methode: **Wir schließen negative Radikanden a aus**! Bleibt noch die Doppeldeutigkeit bei geradzahligem Wurzelexponenten: Um Eindeutigkeit zu erhalten, verstehen wir unter dem Symbol $\sqrt[n]{a}$ die positive Wurzel aus a. Wollen wir die Doppeldeutigkeit berücksichtigen – z.B. beim Lösen von quadratischen Gleichungen –, schreiben wir das Vorzeichen + oder – vor das Wurzelzeichen.

Mit diesen beiden Konventionen ist $a^{\frac{1}{n}}$ für jede positive reelle Basis a und jede natürliche Zahl n eindeutig als positive Wurzel $\sqrt[n]{a}$ festgelegt. Damit können wir die **Erweiterung des Potenzbegriffs auf rationale Zahlen als Exponenten** vornehmen. Für einen beliebigen rationalen Exponenten $\frac{m}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$ definieren wir $a^{\frac{m}{n}}$ als die n-te Wurzel aus a^m oder, was dasselbe ist, als die m-te Potenz von $\sqrt[n]{a}$.
Damit ist a^x für jede positive reelle Basis a und für jede rationale Zahl x als Exponent wohldefiniert.

Die Potenzgesetze gelten dann auch für Potenzen mit rationalen Exponenten x und y.

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y} \qquad (a^x)^y = a^{x \cdot y} \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Die **Erweiterung des Potenzbegriffs auf reelle Zahlen als Exponenten** bei positiver reeller Basis benutzt wieder das Permanenzprinzip, allerdings etwas subtiler: Es benutzt Eigenschaften des Potenzierens im Zusammenhang mit der Ordnung der reellen Zahlen, die sogenannten Monotonie-Gesetze.

- 1. Monotoniegesetz „gleicher Exponent – wachsende Basis"
  Für positive reelle Zahlen als Basis und für einen festen positiven rationalen Exponenten gilt: Mit wachsender Basis wachsen die Potenzen.
  Für positive Zahlen als Basis und für einen festen negativen Exponenten gilt: Mit wachsender Basis fallen die Potenzen.
  In Formelsprache: Für $x > 0$ gilt: Wenn $0 < a < b$, dann $0 < a^x < b^x$ und $0 < b^{-x} < a^{-x}$.

- 2. Monotoniegesetz „gleiche Basis – wachsender Exponent":
  Für eine reelle Basis größer als 1 gilt: Mit wachsendem Exponenten wächst die Potenz.
  Für eine reelle Basis zwischen 0 und 1 gilt: Mit wachsendem Exponenten fällt die Potenz.
  In Formelsprache: Wenn $x < y$, dann $a^x < a^y$ für $a > 1$ bzw. $a^y < a^x$ für $0 < a < 1$.

Wir wollen nun a^x für eine beliebige irrationale Zahl x definieren. Eine irrationale Zahl x lässt sich beliebig gut durch zwei rationale Zahlen u und v einschachteln, d.h. $u < x < v$, wobei die Differenz $v - u$ gegen Null geht. Für die Potenzen a^u und a^v mit diesen rationalen Zahlen als Exponenten gilt nach dem 2. Monotoniegesetz $a^u < a^v$ für $a > 1$ bzw. $a^v < a^u$ für $0 < a < 1$. Man kann zeigen, dass ihre Differenz ebenfalls gegen Null geht. Sie bilden also eine Einschachtelung einer positiven reellen Zahl c. Wir definieren deshalb $c = a^x$.

Die Beschreibung verrät es: Hier ist nicht nur Arithmetik bzw. Algebra im Spiel, es kommen Argumente der Analysis hinzu („Intervallschachtelung"). Eine präzisere Ausführung dieser Gedanken erfordert etwas mehr Aufwand.

Wir sind nun an einem Punkt angekommen, wo z.B. die Potenz 2^x für jede reelle Zahl x eine wohldefinierte positive reelle Zahl ist. Perspektivwechsel auf die funktionale Sichtweise: Die Vorschrift $f(x) = 2^x$ ordnet jeder reellen Zahl x den Funktionswert 2^x zu. Wir nennen sie Exponentialfunktion zur Basis 2.

e.2 Proportionales Wachstum und Exponentialfunktionen

Wohlgemerkt: Wir befinden uns im weiteren Verlauf dieses Kapitels in der **Welt der reellen Zahlen** und betrachten im Folgenden reelle Funktionen; d.h. Definitions- und Wertebereich der Funktionen bestehen aus reellen Zahlen.

Wachstumsprozesse wie z.B. Algen- oder Bakterienwachstum werden durch monoton wachsende reelle Funktionen beschrieben, Zerfallsprozesse wie z.B. radioaktiver Zerfall durch monoton fallende. Im Folgenden soll „Wachstum" als umfassender Begriff verwendet werden und auch Zerfallsprozesse einbeziehen.

Man unterscheidet **diskretes** und **kontinuierliches** Wachstum. Bei ersterem findet der Veränderungsprozess oder das, was man von ihm beobachten kann, in getrennten Zeitpunkten mit immer gleichem Abstand statt (Beispiel: Zinsberechnung). Die Zeitpunkte kann man durchnummerieren; der Definitionsbereich von Funktionen, die solch ein diskretes Wachstum beschreiben, ist die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen; es handelt sich um **Folgen**. Bei kontinuierlichen Prozessen findet eine ständige (oder wie man auch sagt: stetige) Veränderung statt; der Definitionsbereich der **Funktionen** ist die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Selbst bei diskreten Prozessen wie bei der Zellteilung kann es sinnvoll sein (weil einfacher und nahezu ergebnisgleich), sie durch ein kontinuierliches Wachstum zu modellieren.

Wir betrachten im Folgenden nur kontinuierliches Wachstum. Dabei wird eine Wachstumsfunktion mit f, ein Zeitpunkt mit x beschrieben. Dann ist f(x) der Messwert der Größe, der Bestand, zum Zeitpunkt x. Als Zeitpunkt 0 können wir uns den Beginn der Messung vorstellen. Zeitpunkte danach werden durch positive reelle Zahlen beschrieben, Zeitpunkte davor durch negative.

Ein Spezialfall kontinuierlichen Wachstums ist **proportionales** oder **exponentielles Wachstum.** Wir charakterisieren es auf zwei Weisen, die, wie sich später herausstellen wird, äquivalent sind. Die erste Charakterisierung setzt die Messwerte an drei verschiedenen Zeitpunkten in einer Gleichung zueinander in Beziehung. (Man nennt solche Art Gleichungen auch Funktionalgleichungen.) Hieraus ergeben sich erstaunlich viele weitere Eigenschaften bis hin zu einer Funktionsvorschrift für solche Wachstums funktionen.
Im weiteren Verlauf, insbesondere auf unser Ziel hin, die Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ zu verstehen, spielt eine zweite Charakterisierung für proportionales Wachstum eine besondere Rolle. Sie nimmt die Geschwindigkeit des Wachstums zu jedem Zeitpunkt in den Blick. Die erste Charakterisierung kann man als diskrete, die zweite als kontinuierliche Variante der Beschreibung des Wachstumsverhaltens verstehen.

Wir stellen noch eine Anfangsbedingung für alle Funktionen f, die proportionales Wachstum beschreiben: Zum Zeitpunkt 0 sei 1 Einheit der wachsenden Größe vorhanden; d.h. der Startwert sei $f(0) = 1$.
Die Anfangsbedingung besagt lediglich, dass der Bestand zu Beginn der Messung nicht Null ist. Ansonsten ist sie keine besondere Einschränkung, da wir nichts über die Einheit gesagt haben; es ist also eher eine Festlegung der Einheit.

e.2.1 Charakterisierung proportionalen Wachstums durch das Additionstheorem

„Der Messwert wächst oder fällt in gleichen Zeitabständen proportional zum jeweiligen Bestand."
Wir übersetzen diese umgangssprachliche Charakterisierung in die Formelsprache. Sei x_1 ein beliebiger Zeitpunkt und x_2 ein beliebiger, aber fester Zeitabstand, dann ist $f(x_1 + x_2)$ der Messwert zum Zeitpunkt $x_1 + x_2$ und $f(x_1)$ der Messwert zum Zeitpunkt x_1. Es ist $f(x_1 + x_2)$ proportional zu $f(x_1)$, also $f(x_1 + x_2) = c \cdot f(x_1)$. Der Proportionalitätsfaktor c hängt von der Größe des Zeitabstands x_2 ab. Setzen wir für x_1 den Zeitpunkt 0 ein und berücksichtigen wir, dass der Startwert $f(0) = 1$ ist, erhalten wir $f(x_2) = c$.
Die erste Charakterisierung proportionalen Wachstums können wir also in der Formelsprache so ausdrücken:

$$\mathbf{f(x_1 + x_2) = f(x_2) \cdot f(x_1) = f(x_1) \cdot f(x_2)} \qquad ☺$$

Das ist unsere Super-Gleichung, aus der wir viele weitere Eigenschaften solcher Funktionen folgern.
Zur Erinnerung: In der Trigonometrie gibt es Gleichungen, deren linke Seite so ähnlich aussieht:

$\sin(\alpha+\beta) = \ldots$ bzw. $\cos(\alpha+\beta) = \ldots$. Sie heißen Additionstheoreme (Kap. π.6). Wegen der strukturellen Ähnlichkeit (und aus einem tieferen Grund, wie wir in Kap. Finale noch sehen werden), nennt man die Gleichung ☺ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ das **Additionstheorem** der Funktion f.

Kurz zusammengefasst: Ein Prozess der dadurch charakterisiert wird, dass der Messwert in gleichen Zeitabständen proportional zum jeweiligen Bestand wächst oder fällt, wird durch Funktionen beschrieben, die dem Additionstheorem $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ genügen.

Wir untersuchen nun Funktionen, die diesen beiden Bedingungen genügen:

(AT) a) Additionstheorem ☺ $\mathbf{f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)}$, b) Anfangsbedingung $\mathbf{f(0) = 1}$

Wir wollen aus AT zunächst eine Reihe weiterer Eigenschaften und anschließend die Funktionsvorschrift solcher Funktionen f herleiten.

<u>1. Folgerung</u>: Eine Funktion f, die (AT) genügt, ist positiv.

Wir zeigen, dass f nicht negativ ist. Für alle x ergibt sich mit Hilfe des Additionstheorems ☺ $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(f\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 \geq 0$. Kann es ein x mit $f(x) = 0$ geben? Nein; denn nach dem Additionstheorem ☺ ist $1 = f(0) = f\big(x + (-x)\big) = f(x) \cdot f(-x)$ und mit $f(x) = 0$ ergäbe sich ein Widerspruch.

Aus der letzten Formel ergibt sich unmittelbar die

<u>2. Folgerung</u>: Gilt (AT), dann ist $f(-x)$ der Kehrwert von $f(x)$, als Formel: $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

<u>3. Folgerung</u>: Eine Funktion f, die dem Additionstheorem ☺ genügt (wir brauchen hier die Anfangs-bedingung nicht), erfüllt auch die folgenden Gleichungen für alle reellen Zahlen x:

- $f(n \cdot x) = (f(x))^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $f(-n \cdot x) = (f(x))^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $f\left(\frac{1}{n} \cdot x\right) = \sqrt[n]{f(x)} = (f(x))^{\frac{1}{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$
- $f\left(\frac{m}{n} \cdot x\right) = (f(x))^{\frac{m}{n}}$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$

Die erste Gleichung ergibt sich für $n = 2$ unmittelbar aus dem Additionstheorem ☺, für alle weiteren Fälle ergeben sich induktiv durch $n \cdot x = (n-1) \cdot x + x$.
Aus der ersten Gleichung und der 2. Folgerung ergibt sich die zweite Gleichung.
Die dritte Gleichung folgt aus $f(x) = f\left(n \cdot \frac{1}{n} \cdot x\right) = \left(f\left(\frac{1}{n} \cdot x\right)\right)^n$, die vierte durch Kombination der ersten drei Gleichungen.

<u>4. Folgerung</u>: Eine Funktion f, die (AT) genügt und außer bei Null noch an einer anderen Stelle x_0 den Wert 1 annimmt, nimmt an unendlich vielen Stellen den Wert 1 an.

Das folgt aus der 3. Folgerung. Speziell gilt $f\left(\frac{m}{n} \cdot x_0\right) = 1$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$.

<u>5. Folgerung</u>: Eine Funktion f, die (AT) genügt und außer bei Null noch an einer anderen Stelle x_0 den Wert 1 und an einer Stelle x_1 einen von 1 verschiedenen Wert annimmt, hat an der Stelle x_1 einen Sprung, d.h. sie ist dort nicht stetig.

Beweis: Das Verhältnis $x_1 : x_0$ ist kein Bruch, d.h. $x_1 : x_0 \neq \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$; sonst wäre einerseits $f(x_1) \neq 1$, andererseits nach der 4. Folgerung $f(x_1) = f\left(\frac{m}{n} \cdot x_0\right) = f(x_0) = 1$.
Man kann $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ aber so wählen, dass $\frac{m}{n} \cdot x_0$ beliebig nahe an x_1 herankommt; man muss den Bruch $\frac{m}{n}$ nur so wählen, dass er dem Quotienten $x_1 : x_0$ beliebig nahekommt. Da nach der 3. Folgerung $f\left(\frac{m}{n} \cdot x_0\right) = 1$ ist, bleibt aber der Unterschied zwischen $f\left(\frac{m}{n} \cdot x_0\right)$ und $f(x_1)$ $(\neq 1)$ immer gleich.

Natura non facit saltus. (lat. Die Natur macht keine Sprünge.) Das war eine Grundannahme der griechischen Philosophie und Naturbeobachtung. Sie galt bis in die Neuzeit hinein (Newton, Leibniz, Kant). Danach erfolgen Veränderungen in der Natur wie z.B. Wachstumsprozesse nicht sprunghaft und plötzlich, sondern stetig. Der Gültigkeitsbereich dieser Annahme erfährt allerdings in der modernen Physik bei Beobachtungen im subatomaren Bereich seine Grenzen (Quantensprung).

Wir wollen im Folgenden annehmen, dass unsere Wachstumsprozesse ohne Sprünge, also stetig verlaufen; d.h. wir untersuchen Funktionen, die diesen drei Bedingungen genügen:

(AT*) a) Additionstheorem ☺, b) Anfangsbedingung $\mathbf{f(0) = 1}$, c) f ist stetig

Die 5. Folgerung kann man dann noch anders formulieren:

6. Folgerung: Eine Funktion f, die (AT*) genügt und außer bei Null noch an einer anderen Stelle x_0 den Wert 1 annimmt, ist konstant (nämlich f(x) = 1 für alle x).

Funktionen, die (AT*) erfüllen und nicht konstant gleich 1 sind, haben also überall außer bei Null einen Wert, der von 1 verschieden ist. Wir wollen im Folgenden Wachstumsfunktionen untersuchen, die nicht konstant sind und setzen deshalb an der Stelle 1 einen von 1 verschiedenen Wert voraus. Wir untersuchen also Funktionen, die diesen vier Bedingungen genügen

(AT) a) Additionstheorem ☺, b) Anfangsbedingung $\mathbf{f(0) = 1}$, c) f ist stetig, d) $\mathbf{f(1) = q > 0}$**

Dass $q > 0$ sein muss, ergibt sich aus der 1. Folgerung. Wie sich die Funktion im Ganzen verhält, hängt davon ab, ob q größer oder kleiner als 1 ist:

7. Folgerung: Erfüllt eine Funktion f die Bedingung (AT**),
- dann folgt aus $q > 1$, dass $f(x) > 1$ für alle $x > 0$ und $0 < f(x) < 1$ für alle $x < 0$ ist,
- dann folgt aus $0 < q < 1$, dass $0 < f(x) < 1$ für alle $x > 0$ und $f(x) > 1$ für alle $x < 0$ ist.

Beweis: Es sei $f(1) = q > 1$. Angenommen, es gäbe eine Stelle $x > 0$, an der $f(x) < 1$ wäre. Die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig. Eine stetige Funktion nimmt zwischen x und 1 alle Werte zwischen f(x) und f(1), also auch den Wert 1 an; sonst würde sie ja über den Wert 1 hinwegspringen. (In der elementaren Analysis nennt man das den Zwischenwertsatz für stetige Funktionen.) Nach der 6. Folgerung müsste f dann aber überall gleich1 sein - im Widerspruch zu der Voraussetzung $f(1) = q > 1$.
Aus $q > 1$ folgt also $f(x) > 1$ für alle $x > 0$. Dann ergibt sich für alle $x < 0$ aus der 2. Folgerung $f(x) < 1$.
Der Beweis für $0 < q < 1$ verläuft analog.

Eine Funktion f heißt streng monoton steigend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$; sie heißt streng monoton fallend, wenn aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$.

8. Folgerung: Erfüllt eine Funktion f die Bedingung (AT**),
- dann folgt aus $q > 1$, dass f streng monoton steigend ist,
- dann folgt aus $0 < q < 1$, dass f streng monoton fallend ist.

Beweis: Sei $q > 1$ und $x_1 < x_2$, also $x_1 - x_2 < 0$, mithin nach der 7. Folgerung ist $f(x_1 - x_2) < 1$. Dann ist wegen des Additionstheorems $\frac{f(x_1)}{f(x_2)} = \frac{f(x_2+(x_1-x_2))}{f(x_2)} = f(x_1 - x_2) < 1$, also $f(x_1) < f(x_2)$.
Der Beweis für $0 < q < 1$ verläuft analog.

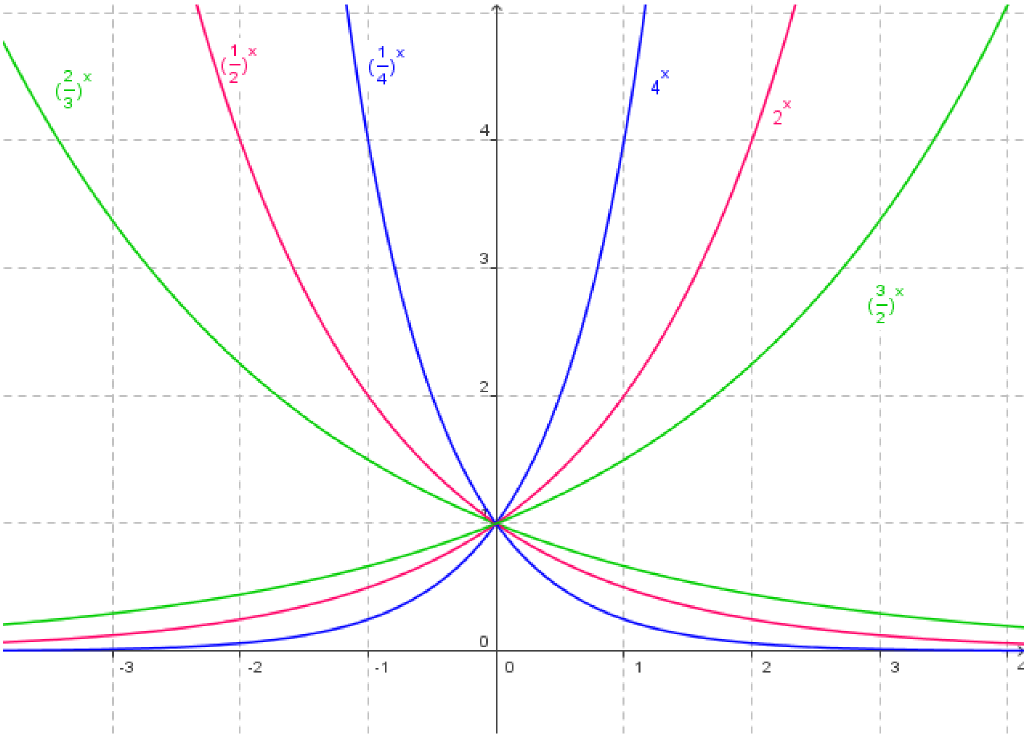
Aus dem Funktionswert q an der Stelle 1 können wir nun auf die Funktionswerte an den übrigen Stellen schließen:

9. Folgerung: Erfüllt eine Funktion f die Bedingung (AT**), dann ist $f(x) = q^x$ mit $q = f(1) = 0$ für alle reellen Zahlen x.

Beweis: Aus der 3. Folgerung ergibt sich $f(x) = q^x$ für alle rationalen Zahlen $x = \frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es fehlt noch die Verallgemeinerung auf reelle Zahlen x. Hier müssen wir wieder die Stetigkeit als zusätzliche Voraussetzung an f stellen. Die Argumentation läuft dann wie folgt: Jede irrationale Zahl x lässt sich beliebig gut durch zwei rationale Zahlen u und v einschachteln, wobei die Differenz v – u gegen Null geht. Dann gehen auch die Differenzen f(v) – f(x) und f(x) – f(u) sowie f(v) – f(u) gegen Null; sonst hätte die Funktion f einen Sprung an der Stelle x. Die beiden Werte $f(u) = q^u$ und $f(v) = q^v$ schachteln also ihrerseits eine positive reelle Zahl c ein; wir definieren daher $c = f(x) = q^x$.

Funktionen der Form $f(x) = q^x$ mit $q > 0$ heißen **Exponentialfunktionen.** Exponentialfunktionen sind also die einzigen stetigen Funktionen, die das Additionstheorem ☺ $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ und die Anfangsbedingung $f(0) = 1$ erfüllen.
Das Additionstheorem lautet in expliziter Form $q^{x_1+x_2} = q^{x_2} \cdot q^{x_1}$. Die Gleichung kommt uns bekannt vor. Von rechts nach links gelesen, ist es das erste Potenzgesetz: Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert (vgl. Kap. e.1). Wir haben hier auf einem anderen Weg gezeigt, dass das erste Potenzgesetz auch für reelle Exponenten gilt.

Zusammenfassung:
Stetige Funktionen, für die gilt „Der Messwert wächst oder fällt in gleichen Zeitabständen proportional zum jeweiligen Bestand." und die den Startwert $f(0) = 1$ haben, erfüllen das Additionstheorem $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ und haben die Funktionsvorschrift $f(x) = q^x$ mit $q = f(1) > 0$.
Wir erhalten also eine Schar von Funktionen, die durch den Parameter q, den Proportionalitätsfaktor des proportionalen Wachstums für den Zeitabstand 1 bzw. den Funktionswert an der Stelle 1, unterschieden werden. Eine solche Funktion heißt **Exponentialfunktion** zur **Basis** q.
Alle Exponentialfunktionen sind positiv.
Alle Exponentialfunktionen sind injektiv, und zwar streng monoton steigend für $q > 1$, streng monoton fallend für $0 < q < 1$.
Wenn man die Wertemenge auf die positiven reellen Zahlen einschränkt, sind alle Exponentialfunktionen sogar bijektiv.
Wegen $(\frac{1}{q})^x = q^{-x}$ verlaufen die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = q^x$und $g(x) = \left(\frac{1}{q}\right)^x$ spiegel-symmetrisch zur y-Achse.



Quelle: uhu.mpgmuenchen.de [Aug2011]

Wir haben am Beginn dieses Abschnitts etwas überschwänglich vom Additionstheorem als einer „Super-Gleichung" gesprochen. Wenn wir in der Rückschau sehen, was wir alles aus dieser Gleichung und der Anfangsbedingung herleiten konnten - freilich unter Hinzunahme der Stetigkeit als weiterer Voraussetzung -, dann scheint das nicht übertrieben.

e.2.2 Charakterisierung proportionalen Wachstums durch eine Differentialgleichung

„Die lokale Änderungsrate des Bestands ist immer proportional zum Bestand f(x).“
Die lokale Änderungsrate ist die Momentangeschwindigkeit, mit der sich der Bestand ändert. Der Bestand werde durch eine Funktion f beschrieben. Wenn man die Messwerte zu einem Zeitpunkt x und einem Zeitpunkt x+h (davor für $h > 0$ oder danach für $h < 0$) vergleicht, dann ist die relative Änderung des Bestands $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ die Durchschnittsgeschwindigkeit, mit der sich der Bestand zwischen x und x+h ändert. Das ist anschaulich im Graphen der Funktion f die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x|f(x))$ und $(x + h|f(x + h))$. Beim Grenzübergang für h gegen Null ergibt sich die Momentangeschwindigkeit als lokale Änderungsrate $f'(x)$ zum Zeitpunkt x, in formaler Schreibweise $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Das ist anschaulich die Steigung der Tangente durch den Punkt $(x|f(x))$.

Die zweite Charakterisierung setzt also voraus, dass die Funktion f differenzierbar ist, und kann formal für alle reellen Zahlen x durch die Gleichung $f'(x) = p \cdot f(x)$ mit dem Proportionalitätsfaktor p beschrieben werden. Eine solche Gleichung, die die Ableitung einer Funktion in Beziehung zur Funktion selber setzt, heißt **Differentialgleichung.** An Stelle der Änderung des Messwerts in einem festen Zeitabstand beschreibt die Differentialgleichung die momentane Änderungsgeschwindigkeit.
Als **Anfangsbedingung** setzen wir wieder $f(0) = 1$.

(DG) a) Differentialgleichung $\mathbf{f'(x) = p \cdot f(x)}$ mit $\mathbf{p} \in \mathbb{R}$, b) Anfangsbedingung $\mathbf{f(0) = 1}$

Wir ziehen einige Schlüsse aus dieser Charakterisierung von Funktionen f mit proportionalem Wachstum:

1. Folgerung: Eine Funktion, die (DG) mit dem Proportionalitätsfaktor $p = 0$ erfüllt, ist konstant, nämlich $f(x) = 1$ für alle x.

Beweis: Konstante Funktionen haben die Ableitung Null. Aus dem Mittelwertsatz der elementaren Analysis ergibt sich: Konstante Funktionen sind die einzigen, deren Ableitung überall Null ist. Wegen der Anfangsbedingung ist dann $f(x) = 1$ für alle x.

2. Folgerung: Für eine Funktion, die (DG) erfüllt, gilt $f(x) \cdot f(-x) = 1$ für alle x.

Beweis: Für die Funktion $g(x) = f(x) \cdot f(-x)$ gilt aufgrund von (DG) $g'(0) = 0$ und $g(0) = 1$. Nach der 1. Folgerung ist $g(x) = 1$ für alle x.

Aus der 2. Folgerung ergibt sich durch Widerspruchsbeweis unmittelbar:

3. Folgerung: Eine Funktion, die (DG) erfüllt, besitzt keine Nullstelle.

Hieraus wiederum folgt:

4. Folgerung: Eine Funktion, die (DG) erfüllt, ist positiv.

Beweis: Die Funktion f ist stetig, weil differenzierbar, hat also keine Sprünge. Wenn f an einer Stelle x_1 negativ wäre, dann müsste es zwischen $x = 0$ und $x = x_1$ eine Nullstelle geben, sonst würde f ja über den Wert Null hinwegspringen. Formaler ausgedrückt: Nach dem Zwischenwertsatz der elementaren Analysis nimmt f zwischen $x = 0$ und $x = x_1$ jeden Wert zwischen $f(0) = 1$ und $f(x_1) < 0$, also auch den Wert Null an. Das kann wegen der 4. Folgerung nicht sein.

Wir brauchen die Erkenntnis, dass eine Funktion, die (DG) erfüllt, überall positiv ist, um den Zusammenhang zu der Charakterisierung der Wachstumsfunktionen durch das Additionstheorem herzustellen.

5. Folgerung: Eine Funktion f, die (DG) erfüllt, genügt dem Additionstheorem $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$.

Die Zahlen q bzw. p legen die Funktion eindeutig fest. (Beachte: Der Zusammenhang zwischen den Zahlen p und q ist noch nicht geklärt.)

Zum Beweis untersuchen wir die Hilfsfunktion $h(x) = \frac{f(x) \cdot f(y)}{f(x+y)}$; d.h wir betrachten auf der rechten Seite x als Variable und y als beliebigen, aber festen Parameter. Da f überall positiv ist, gilt das Gleiche für h und es ist $h(0) = 1$. Leitet man h nach der Quotientenregel ab und wendet dann für die Ableitungen von f die Differentialgleichung an den jeweiligen Stellen an, ergibt sich $h'(x) = 0$ für alle x, also $h(x) = 1$ für alle x.

Wir haben damit gezeigt: Eine Funktion f, die der Charakterisierung des proportionalen Wachstums durch die Differentialgleichung $f'(x) = p \cdot f(x)$ genügt, genügt auch der Charakterisierung durch das Additionstheorem $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$. Die Funktion ist überall (beliebig oft) differenzierbar, also auch stetig. Nach dem, was wir bei der Charakterisierung durch das Additionstheorem gelernt haben, muss sie die Form $f(x) = q^x$ haben, wobei $q = f(1)$ ist. Da aber die Differentialgleichung zunächst keine Information über den Wert der Funktion f an der Stelle 1 gibt, wissen wir zwar, dass es sich bei einer Funktion, die der Differentialgleichung genügt, um eine Exponentialfunktion handelt, aber nicht zu welcher Basis. Könnten nicht soger verschiedene Exponentialfunktionen derselben Differentialgleichung genügen?. Das können wir durch die 6. Folgerung ausschließen.

<u>6. Folgerung</u>: Zwei Funktionen f und g, die beide (DG) mit demselben Proportionalitätsfaktor p erfüllen, stimmen überall überein.

Zum Beweis untersuchen wir die Hilfsfunktion $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$. Da f und überall positiv sind, gilt das Gleiche für h und es ist $h(0) = 1$. Leitet man h nach der Quotientenregel ab und wendet dann für die Ableitungen von f und g die Differentialgleichung an, ergibt sich $h'(x) = 0$ für alle x, also $h(x) = 1$ für alle x.

Wir fassen die Ergebnisse des Abschnitts e.2 zusammen.
Zusammenfassung: Funktionen, die ein proportionales Wachstum beschreiben, Exponentialfunktionen, kann man kennzeichnen durch

- das Additionstheorem $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ und die Anfangsbedingung $f(0) = 1$.
  Aus $q = f(1)$ und der Stetigkeit von f folgt
- die Zuordnungsvorschrift $f(x) = q^x$ mit reeller Basis $q > 0$,
- die Differentialgleichung $f'(x) = p \cdot f(x)$ mit der Anfangsbedingung $f(0) = 1$.

Die Zahlen q bzw. p legen die Funktion eindeutig fest. Beachte: Der Zusammenhang zwischen den Zahlen p und q ist noch nicht geklärt.

Wir widmen uns jetzt den Funktionen, die der Differentialgleichung $f'(x) = p \cdot f(x)$ und der Anfangs bedingung $f(0) = 1$ genügen, und wollen allein aus dieser Information (ohne Ausnutzung des Additionstheorems) die Funktionswerte an allen Stellen ermitteln. Dabei gehen wir vom Speziellen zum Allgemeinen: Wir untersuchen zuerst den Fall $p = 1$ und lösen dann mit seiner Hilfe die übrigen Fälle.

e.3. Die e-Funktion

Wir kommen nun zu einer besonderen Wachstumsfunktion. Für sie gilt: **Die lokale Änderungsrate des Bestands ist immer gleich dem Bestand f(x)**; d.h. für sie ist der Proportionalitätsfaktor $p = 1$; sie erfüllt die besonders einfache Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ für alle x und die Anfangsbedingung $f(0) = 1$. Sie heißt auch **natürliche Wachstumsfunktion**. Wir wissen: f ist eine Exponentialfunktion. Wir bezeichnen die Basis dieser speziellen Exponentialfunktion, also den Funktionswert der natürlichen Wachstumsfunktion an der Stelle 1, mit e, also $e = f(1)$. Demnach hat die natürliche Wachstumsfunktion die Zuordnungsvorschrift $f(x) = e^x$. Beachte: Die Zuordnungsvorschrift hilft uns noch nicht weiter; denn wir wissen nicht, welchen Wert e hat.

e.3.1 Berechnung von e und des Funktionswerts f(x) durch geometrische Näherung

Idee: Betrachte den Graphen der Funktion f.
Unterteile das Intervall [0,x] in n gleichlange Abschnitte der Länge h und ersetze die Kurve in diesen Abschnitten durch Strecken (Sekantenabschnitte). Wenn h klein genug ist, ist die Steigung der Sekantenabschnitte ungefähr gleich der Tangentensteigung am Beginn des Abschnitts.

Die Sekantensteigung an einem Punkt x_0 ist $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, die Tangentensteigung $f'(x_0)$. In unserer näherungsweisen Betrachtung ist also $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \approx f'(x_0)$ bzw. $f(x_0 + h) - f(x_0) \approx h \cdot f'(x_0)$.
Da f der Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ genügt, folgt $f(x_0 + h) \approx (1 + h) \cdot f(x_0)$.

Wir starten mit $x_0 = 0$ und $f(0) = 1$. Dann ergibt sich: $f(h) \approx 1 + h$, $f(2h) \approx (1 + h)^2$, …. , $f(nh) \approx (1 + h)^n$, also mit $x = nh$: $f(x) \approx (1 + \frac{x}{n})^n$
Diese geometrische Näherung wird immer besser, je kleiner die Abschnitte h werden bzw. je größer die Zahl n der Abschnitte ist, in die das Intervall [0,x] unterteilt wird. Die Vermutung lautet also:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Die Funktion ist hier punktweise (d.h. für jedes einzelne x) durch den Grenzwert einer Folge definiert.
Zu prüfen wäre: Konvergiert die Folge für jedes x? Ist die so definierte Funktion an jeder Stelle x differenzierbar? Ist die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ erfüllt?
Mit Mitteln der Analysis kann man alle diese Fragen bejahen.

Nun können wir den Wert von e berechnen. Für $x = 1$ ergibt sich:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Die Folge konvergiert allerdings sehr schlecht. Noch $\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} = 1{,}01^{100} = 2{,}7048\ldots$ stimmt mit e nicht auf der zweiten Nachkommastelle überein.

e.3.2 Berechnung von e und des Funktionswerts f(x) durch Potenzreihenentwicklung

Idee: Prüfe, ob die natürliche Wachstumsfunktion zu einer bekannten Klasse von Funktionen gehört. Bekannt sind lineare, quadratische sowie Potenzfunktionen, die alle zur Klasse der Polynomfunktionen gehören. Prüfe also, ob die natürliche Wachstumsfunktion f eine Polynomfunktion ist.

Angenommen, f sei eine reelle Polynomfunktion n-ten Grades[1] $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$ mit reellen Koeffizienten a_i. Der Ansatz muss falsch sein, denn beim Ableiten dieser Funktion ergibt sich eine Polynomfunktion (n-1)-ten Grades. Eine Polynomfunktion n-ten Grades kann niemals überall dieselben Funktionswerte haben wie eine Polynomfunktion (n-1)-ten Grades, da der höchste Exponent der einen gerade und der anderen ungerade ist und beide folglich einen unterschiedlichen Funktionsverlauf für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ haben. (Ein anderer Beweis der Ungleichheit ergibt sich aus dem Fundamentalsatz der Algebra, vgl. Kap. i.5.)
Dieses Gegenargument entfällt aber, wenn man unendlich viele Summanden zulässt. Dann gibt es keinen höchsten Exponenten. Der neue Ansatz lautet: $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \cdots$.

[1] Aus praktischen Gründen, die gleich deutlich werden, fangen wir anders als in Kap. i.5 mit der Potenz niedrigsten Grades an.

Der Term auf der rechten Seite der Gleichung heißt Potenzreihe.
Aus $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$ folgt für alle Ableitungen $f^{(n)}(0) = 1$. Andererseits ergibt sich, wenn man die Potenzreihe gliedweise mit den bekannten Ableitungsregeln differenziert und die Ableitungen an der Stelle $x = 0$ betrachtet: $f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$. Also ist $a_n = \frac{1}{n!}$.

Die Vermutung lautet also: $f(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n$.

Die Funktion ist hier punktweise durch den Grenzwert einer unendlichen Reihe definiert.
Zu prüfen wäre: Konvergiert die Reihe für jedes x? Ist die so definierte Funktion überall differenzierbar? Kann man die Ableitung bilden, indem man die Potenzreihe gliedweise differenziert (denn dann ist die Ableitung gleich der Funktion, also die Differentialgleichung $f'(x) = f(x)$ erfüllt)?
Mit Mitteln der Analysis kann man alle diese Fragen bejahen.

Für $x = 1$ ergibt sich: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

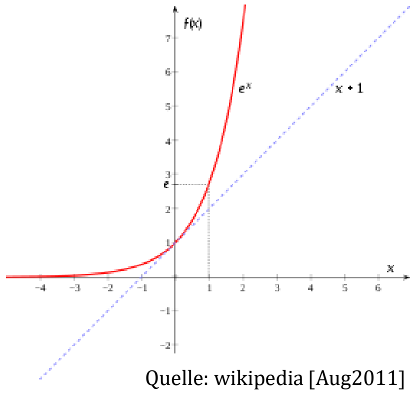
Die Reihe konvergiert sehr gut. Wenn man die Potenzreihe schon nach zehn Summanden abbricht, erhält man bereits die ersten sechs Nachkommastellen von e. Als Wert erhält man $e = 2{,}718281828459\ldots$.

Da es nur eine Funktion mit den Eigenschaften $f'(x) = f(x)$ und $f(0) = 1$ gibt, nämlich die Exponentialfunktion mit der Basis $e = f(1)$, gilt

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

Damit haben wir drei verschiedene Darstellungen derselben Funktion f, der e-Funktion, gefunden:

- Die einzelnen Funktionswerte werden durch den Grenzwert einer unendlichen Folge ermittelt, $f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.
- Die einzelnen Funktionswerte werden durch den Grenzwert einer unendlichen Reihe ermittelt, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, d.h. die Funktion lässt sich als Potenzreihe schreiben.
- Die einzelnen Funktionswerte lassen sich als Potenzen einer speziellen Basis e ermitteln, $f(x) = e^x$, die Funktion ist eine spezielle Exponentialfunktion.



Quelle: wikipedia [Aug2011]

Mit Hilfe der e-Funktion können wir nun auch die allgemeine Wachstumsfunktion bestimmen. Sie genügt der Differentialgleichung $f'(x) = p \cdot f(x)$ und der Anfangsbedingung $f(0) = 1$. Aus der Kettenregel folgt, dass die Funktion $f(x) = e^{p \cdot x}$ beide Bedingungen erfüllt. Damit stellt die Zahl e den noch fehlenden Zusammenhang zwischen den beiden Proportionalitätsfaktoren p und q her: $q = e^p$.

Als Funktion von den reellen Zahlen auf die positiven reellen Zahlen ist die e-Funktion bijektiv. Zu jeder positiven reellen Zahl y gibt es also eine reelle Zahl x, so dass $e^x = y$ ist. Man nennt x den **natürlichen Logarithmus** von y, in Zeichen: $x = \ln(y)$.

Bis zum 18. Jahrhundert stand nicht die e-Funktion, sondern ihre Umkehrfunktion, die Logarithmus-Funktion, im Mittelpunkt des mathematischen Interesses. Der Grund liegt in der funktionalen Beziehung, der sie genügt: $\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(y_1) + \ln(y_2)$. Sie folgt direkt aus dem Additionstheorem der e-Funktion;
$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln(e^{x_1} \cdot e^{x_2}) = \ln(e^{x_1+x_2}) = x_1 + x_2 = \ln(y_1) + \ln(y_2)$

Mit Hilfe dieser funktionalen Beziehung konnte man dann eine Multiplikation auf die leichter durchzuführende Addition zurückführen. Die Funktionswerte der Logarithmus-Funktion wurden in einer Tabelle („Logarithmen-Tafel“) aufgelistet. Um das Produkt $y_1 \cdot y_2$ zu berechnen, liest man die Logarithmen von y_1 und y_2 in der Logarithmen-Tafel ab, addiert die beiden Logarithmen (schriftlich) zur Summe x und schaut nach, wo das Ergebnis in der Logarithmen-Tafel steht, d.h. zu welchen Wert y diese Summe x gehört; dann ist $y_1 \cdot y_2 = y$.
Anstelle der Logarithmentafel diente zum praktischen Gebrauch der Rechenschieber. Er besteht im

Prinzip aus zwei logarithmisch skalierten Linealen, die man gegeneinander verschiebt; das entspricht der Addition von Strecken.

Wir werden die Logarithmen noch einmal gebrauchen: bei der Verallgemeinerung des Potenzbegriffs auf komplexe Exponenten (Kap. Finale 2)-

Das Symbol e

(Quelle: wikipedia)

Man nennt e auch Eulersche Zahl. Der Buchstabe e für diese Zahl wurde zum ersten Mal 1736 von dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler in seinem Werk Mechanica benutzt. Es gibt keine Hinweise, ob dies in Anlehnung an seinen Namen geschah oder in Anlehnung an „Exponentialfunktion" oder aus praktischen Erwägungen der Abgrenzung zu den viel benutzten Buchstaben a, b, c oder d.

Euler, 1707 in Basel geboren, studierte dort ab 1720 u.a. Mathematik und wurde mit 20 Jahren auf eine Professur nach St. Petersburg berufen. Friedrich der Große berief ihn 1741 nach Berlin. Nach 25 Jahren kehrte er wieder nach St. Petersburg zurück, wo er 1783 starb. Nach zunehmenden Problemen mit seinem Augenlicht erblindete Euler 1741 auf dem rechten Auge und 1771 vollständig. Trotzdem entstand fast die Hälfte seines Lebenswerks in der zweiten Petersburger Zeit.

Euler war extrem produktiv: Insgesamt gibt es 866 Publikationen von ihm auf verschiedensten Gebieten der Mathematik. Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z. B. e, π, i, das Summenzeichen $\sum$, die Bezeichnung f(x) für einen Funktionsterm).

Rückblick und Ausblick

Am Anfang und am Ende dieses Kapitels geht es um Potenzen. Dabei vollzieht sich ein entscheidender Perspektivwechsel von der algebraischen Sichtweise auf die funktionale Sichtweise.

Die algebraische Sichtweise auf die Potenz a^x beginnt mit natürlichen Zahlen x als Exponenten und bringt mit Hilfe der Potenzgesetze die Verallgemeinerung auf ganzzahlige Exponenten. Wegen unüberbrückbarer Probleme mit den Potenzgesetzen haben wir uns dann auf positive reelle Zahlen als Basis a beschränkt und dafür die Potenzen auf rationale Exponenten x verallgemeinert. Schließlich haben wir mit einem Hilfsmittel der Analysis, der Intervallschachtelung, auch reelle Exponenten x zulassen können.

Dann haben wir uns der Betrachtung spezieller Funktionen, der Wachstumsfunktionen, zugewandt. Sie können als Exponentialfunktionen $f(x) = q^x$ mit $q > 0$ dargestellt werden. Eine besondere Wachstumsfunktion, die sogenannte natürliche, ist die e-Funktion, die Exponentialfunktion zur Basis e. Aus der Charakterisierung dieser Funktion durch eine einfache Differentialgleichung haben wir ihre Darstellung in eine Potenzreihe entwickelt.

Die Darstellung einer Funktion als Potenzreihe ist ein weiterer Schlüssel zu der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$.

Kapitel Finale

Die faszinierende Beziehung zwischen den vier reellen Zahlen 0, 1, e und π und der imaginären Einheit i lautet: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Die Wachstumszahl e ist eine positive reelle Zahl und Basis der Exponentialfunktion $f(x) = e^x$, die für alle reellen Argumente x, also auch für π, positive Werte annimmt. Es muss also an der imaginären Einheit i liegen, dass negative Werte möglich sind, und an π, dass gerade der Wert –1 herauskommt. Dazu müssen wir uns an die Rolle der Zahl π im Zusammenhang mit Funktionen erinnern, nämlich Nullstelle der Sinus-Funktion und Extremstelle der Kosinus-Funktion zu sein (Kap. π.6). Dabei wenden wir bei den trigonometrischen Funktionen die Betrachtungsweise an, die wir bei der e-Funktion kennengelernt haben, nämlich der Darstellung einer Funktion als Potenzreihe.

Das 19. Jahrhundert war die Blütezeit der Analysis. Einer der Mathematiker, die dazu ganz wesentlich beigetragen haben, war Karl Weierstraß, dem an der Universität Paderborn mit der Weierstraß-Vorlesung durch einen herausragenden Mathematiker der Gegenwart und mit dem Weierstraß-Preis für ausgezeichnete Lehre besondere Ehre erwiesen wird. Der Grund ist, dass Weierstraß in seiner Vita der hiesigen Region verbunden ist.

(Quelle: wikipedia)

Weierstraß wurde 1815 in Ostenfelde im Münsterland geboren, wo sein Vater Sekretär des Bürgermeisters war. Als Karl acht Jahre war, wurde der Vater Steuerinspektor, was dazu führte, dass die Familie viel in Preußen umherziehen musste. Im Sterbejahr seiner Mutter, 1827, erhielt sein Vater einen festen Posten in Paderborn, so dass Karl das dortige „Akademische Gymnasium" (das heutige Gymnasium Theodorianum) besuchen konnte, wo er 1834 sein Abitur als "primus omnium" machte. Nebenher musste er in der Buchführung arbeiten, um die Familienfinanzen zu verbessern. Auf Wunsch des Vaters studierte Weierstraß von 1834 an Rechtswissenschaft und Finanzwesen an der Universität Bonn, um sich auf eine Laufbahn als preußischer Verwaltungsbeamter vorzubereiten, las aber nebenher lieber die Werke berühmter zeitgenössischer Mathematiker. 1838 brach er sein Studium in Bonn ohne Abschluss ab. Sein Vater war aufgebracht, ließ ihn aber trotzdem in Münster Mathematik und Physik auf Lehramt studieren, weil es seinen Neigungen entsprach. Auf sein Examen 1840 bereitete er sich durch Selbststudium in Westernkotten bei Lippstadt vor, wo sein Vater Direktor einer Saline war. Nach dem Examen wurde er Gymnasiallehrer in Münster, Deutschkrone in Westpreußen und Braunsberg in Ostpreußen.

In völliger Isolation von der mathematischen Welt arbeitete er intensiv an aktuellen mathematischen Fragestellungen und publizierte in der Zeitschrift seiner Schule. Aufmerksamkeit erregte aber erst ein Aufsatz 1854 in Crelles Journal, einer der renommiertesten Fachzeitschriften. Als Folge erhielt er im selben Jahr die Ehrendoktorwürde der Universität Königsberg und die führenden Berliner Mathematiker bemühten sich, ihn nach Berlin zu ziehen. Seit 1856 war er Professor in Berlin, wo sich bald eine große Schule um ihn bildete, deren Kennzeichen die Einführung „weierstraßscher Strenge" in die Analysis war. Stärker noch als durch seine Veröffentlichungen wirkte er durch die zahlreichen weit zirkulierenden Mitschriften seiner Vorlesungen durch seine Studenten. Sein Hauptwerk galt der logisch korrekten Fundierung der Analysis (zuerst in Vorlesungen 1859/60) und der Entwicklung der Funktionentheorie auf der Basis der Potenzreihenentwicklungen. Er starb hochgeehrt 1897 in Berlin.

Finale.1 Die Eulersche Formel

Für die Ableitung der Sinus- und der Kosinus-Funktion gilt (vgl. Kap. π.6): sin' = cos und cos' = – sin.
Für die 2. Ableitung der Sinus-Funktion gilt: sin'' = – sin. Anders formuliert: Die Sinusfunktion genügt der Differentialgleichung $f'' = -f$ mit den Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.

Die Differentialgleichung $f'' = -f$ (in der Regel mit begleitenden Koeffizienten) taucht in der Physik bei der Beschreibung von Schwingungsvorgängen auf. Ein einfaches Beispiel ist das Federpendel: An einer Feder hängt ein Gegenstand. Wird er nach unten aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, schwingt er mit zunehmender Geschwindigkeit in die Ruhelage zurück und darüber hinaus, bis er, gebremst durch die Schwerkraft, zum Stillstand kommt und nun wieder in die Gegenrichtung schwingt usw.. Die auf den Gegenstand wirkende Federkraft ist zum einen proportional zur Auslenkung, anders ausgedrückt: je größer die Auslenkung, desto größer die Kraft. Zum andern bewirkt diese Kraft eine Beschleunigung entgegen der Auslenkung. Bezeichnen wir mit f(x) die Auslenkung zum Zeitpunkt x, dann ist f'(x) die Geschwindigkeit und f''(x) die Beschleunigung zum Zeitpunkt x. Lassen wir einmal die Proportionalitätsfaktoren außer Acht, dann gilt also $f = -f''$ bzw. f''.

Angenommen, wir hätten über eine Funktion f nur diese Informationen:
Differentialgleichung $f'' = -f$ Anfangsbedingungen $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$.
Was können wir daraus schließen?

Idee: Prüfe, ob die Funktion f zu einer bekannten Klasse von Funktionen, z.B. zu den Polynomfunktionen gehört. (vgl. Kap. e.3,2)

Angenommen, f sei eine reelle Polynomfunktion n-ten Grades $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n$ mit reellen Koeffizienten a_i. Der Ansatz muss falsch sein, da sich bei der zweiten Ableitung dieser Funktion eine Polynomfunktion (n-2)-ten Grades ergibt und nach dem Fundamentalsatz der Algebra (Kap. i.5) zwei Polynome verschiedenen Grades nicht gleich sein können. Dieses Gegenargument entfällt, wenn man unendlich viele Summanden zulässt: $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n + \cdots$ („Potenzreihe")

Aus f'' = – f und f(0) = 0 und f'(0) = 1 folgt für alle geraden Ableitungen $f^{(2n)}(0) = 0$ und für alle ungeraden Ableitungen $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$. Hieraus ergibt sich $a_{2n} = 0$ und $a_{2n+1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$.

Die Vermutung lautet: $f(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$

Die Funktion f ist punktweise durch den Grenzwert einer unendlichen Reihe mit ausschließlich ungeraden Exponenten definiert. Zu prüfen wäre: Konvergiert die Reihe für jedes x? Ist die so definierte Funktion überall differenzierbar? Ist die Differentialgleichung f'' = - f erfüllt?
Mit Mitteln der Analysis kann man alle diese Fragen bejahen. Die Reihe konvergiert sehr gut.

Man kann zeigen: Es gibt nur eine Funktion mit den Eigenschaften f'' = – f und f(0) = 0 und f'(0) = 1.

Also gilt: $\sin x = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1}$

Da cos x = sin' x ist (und die Analysis zeigt, dass man die obige unendliche Reihe gliedweise differenzieren darf), lässt sich cos x durch den Grenzwert einer unendlichen Reihe mit ausschließlich geraden Exponenten beschreiben: $\cos x = 1 - \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n}$

Beobachtung: In den Potenzreihenentwicklungen von e^x, sin x und cos x kommen, abgesehen vom Vorzeichen, dieselben Koeffizienten vor. Würde man die Potenzreihen von sin x und cos x addieren, erhielte man eine Summe aller Potenzen x^n, jeweils mit dem Koeffizienten $\frac{1}{n!}$, genau wie bei der Potenzreihe von e^x, allerdings mit einem eigenwilligen Rhythmus der Vorzeichen: + + – – + + – – ...
Diesen Rhythmus finden wir auch bei den Potenzen von i:
$i^0 = +1$ $i^1 = +i$ $i^2 = -1$ $i^3 = -i$ $i^4 = +1$ $i^5 = +i$ $i^6 = -1$ $i^7 = -i$ $i^8 = +1$ ...

Der Zusammenhang zwischen den drei Potenzreihen ist einfach zu beschreiben, wenn man in der Potenzreihe der e-Funktion x durch ix ersetzt. Dann ist für eine beliebige reelle Zahl x

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2} \cdot (ix)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot (ix)^n + \cdots$$

$$e^{ix} = 1 + i \cdot x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot i \cdot x^3 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot x^{2n} + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot i \cdot x^{2n+1} + \cdots$$

$$\mathbf{e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x} \qquad \textbf{(Eulersche Formel)}$$

Setzt man in der Eulerschen Formel x = π, ergibt sich: $e^{i\pi} = -1$ bzw.

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

„Eine Leserumfrage des Fachblattes *Mathematical Intelligencer* im Jahr 1990 sah die Identität $e^{i\pi} + 1 = 0$ als das *schönste Theorem* der Mathematik an. Die Zeitschrift *Physics World* nannte im Jahr 2004die Identität die größte Gleichung aller Zeiten.“ [Engel 29]

Diese „größte Gleichung aller Zeiten“ ergibt sich am Schluss als einfache Folgerung aus der Eulerschen Gleichung. Aber ein paar Fragen bleiben hinsichtlich der Herleitung dieser Gleichung, auch wenn alles so zwangsläufig erscheint. Nachdem wir die Potenzreihen der e-Funktion, der Sinus- und der Kosinus-Funktion, allesamt reelle Funktionen, ermittelt haben, haben wir in der Potenzreihe der e-Funktion x durch ix ersetzt, also eine komplexe Potenzreihe erhalten.
Erste Frage: Konvergiert die Potenzreihe von e^{ix} für jedes ix? Die Antwort ist ja und der Aufwand für den Beweis ist nicht wesentlich größer als im reellen Fall.
Zweite Frage: Darf man bei der Addition der Kosinus-Reihe und der Sinus-Reihe die Summanden so vertauschen, dass sie nicht nacheinander, sondern abwechselnd aufgeschrieben werden? Die Antwort ist ebenfalls ja.
Dritte (grundsätzlichere) Frage: Wieso haben wir, nachdem wir in der Potenzreihe x durch ix ersetzt haben, diese neue, komplexe Potenzreihe mit e^{ix} bezeichnet? Die Potenzreihe der e-Funktion haben wir über die Beschreibung eines Wachstumsprozesses durch eine Differentialgleichung erhalten. Im Komplexen müssen wir aber den Verlust der Ordnung hinnehmen. Damit entfällt die Grundlage zur Beschreibung von Wachstumsprozessen. Zwar kann man auch Funktionen mit komplexem Definitions- und Wertebereich differenzieren; der Definition liegt allerdings eine andere Vorstellung zugrunde als im Reellen. Also eine Herleitung der komplexen Potenzreihe wie im Reellen ist nicht möglich.
Was tun? Wir leiten nicht her, sondern nehmen die Analogie zum reellen Fall als Legitimation und <u>definieren</u>: $e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2}\cdot(ix)^2 + \frac{1}{3!}\cdot(ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot(ix)^n + \cdots$. Das sieht zunächst wie ein Trick aus, um eine schöne Formel zu erzeugen. Wie wir im folgenden Abschnitt noch sehen werden, ist es aber nichts anderes als eine Variante des Permanenzprinzips.

Rückschau:
Die Schlüssel zu der geheimnisvollen Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ sind

- die Definition einer Funktion mit Hilfe einer Potenzreihe: Die Differentialgleichungen zusammen mit den Anfangsbedingungen für die e-Funktion und später für die Sinus- und die Kosinus-Funktion führen zu den Potenzreihen der drei Funktionen; die Rechtfertigung dieses Vorgehens muss die (reelle) Analysis liefern.

$\boxed{e}$

- der Übergang von der reellen e-Funktion zur komplexen e-Funktion: Die e-Funktion mit imaginärem Argument ix wird nicht durch eine Differentialgleichung, sondern durch eine Potenzreihe in $\mathbb{C}$ definiert; die Rechtfertigung dieses Vorgehens muss die (komplexe) Analysis liefern. Der Vergleich der komplexen Potenzreihe der e-Funktion mit den reellen Potenzreihen der Sinus- und der Kosinus-Funktion ergibt die Eulersche Formel.

$\boxed{i}$

- die Bedeutung von π als Nullstelle der Sinus- und Minimum der Kosinus-Funktion. Die Verallgemeinerung von Sinus und Kosinus als Seitenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck auf beliebige Winkel mit Hilfe des Einheitskreises und die damit verbundene funktionale Sichtweise einerseits sowie die Einführung des Bogenmaßes zur Winkelmessung andererseits führen zu dieser neuen Sicht auf π. Eingesetzt in die Eulersche Formel, löst sich das Geheimnis.

$\boxed{\pi}$

Finale.2 Nochmal Potenzen

Erinnern wir uns an die Entwicklung des Potenzbegriffs bis hierher. In allen Zahlbereichen – von den natürlichen Zahlen über die rationalen und reellen Zahlen bis hin zu den komplexen Zahlen – gilt: Wenn man multiplizieren kann, dann kann man auch potenzieren, denn die Potenz z^n wird eingeführt als Abkürzung für das n-fache Produkt des Faktors z; das macht allerdings nur Sinn für natürliche Zahlen als Exponenten ($n \geq 1$), wobei z^1 gleich z gesetzt wird. Aus der Definition des Potenzierens folgt das Potenzgesetz $z^m \cdot z^n = z^{m+n}$. Soll dieses weitergelten (Permanenzprinzip!) ergibt sich, dass z^0 gleich Eins und z^{-m} der Kehrwert von z^m für jede von Null verschiedene Basis z ist.

Die Verallgemeinerung des Potenzbegriffs auf rationale und reelle Exponenten bringt unlösbare Konflikte mit dem Permanenzprinzip mit sich, die wir nur dadurch in den Griff bekommen haben, dass wir uns auf positive reelle Zahlen als Basis beschränken; d.h. für beliebige reelle Exponenten x ist z^x nur für positive reelle Zahlen z erklärt (Kap. e.1).

In der Formel $e^{i\pi} + 1 = 0$ taucht eine Potenz mit imaginärem Exponenten auf. Diese Erweiterung des Potenzbegriffs haben wir nicht mit arithmetisch/ algebraischen Mitteln, sondern mit Hilfe eines Instruments der Analysis, der Potenzreihe, geschafft. Zunächst auch nur für eine einzige Basis, nämlich für die positive reelle Basis e, die Eulersche Zahl. Wir haben definiert:

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{1}{2} \cdot (ix)^2 + \frac{1}{3!} \cdot (ix)^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot (ix)^n + \cdots$$

Man könnte meinen, es handele sich hierbei um einen Zirkelschluss, da doch auf der rechten Seite der Gleichung auch schon Potenzen vorkommen. Ja, aber nur mit natürlichen Zahlen als Exponenten, also nur Potenzen in der Originaldefinition.

Die Darstellung einer komplexen Zahl z in Polarkoordinaten lautet (Kap. i.2): $z = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$
Mit Hilfe der Eulerschen Formel lässt sich diese Darstellung kürzer schreiben: $z = r \cdot e^{i\varphi}$.

Danach ist e^{ix} für einen beliebigen imaginären Exponenten ix eine komplexe Zahl auf dem Einheitskreis.
Beispiele: $e^i = \cos 1 + i \cdot \sin 1 = 0{,}54 + 0{,}84\, i$ $\quad e^{100i} = \cos 100 + i \sin 100 = 0{,}86 - 0{,}51\, i$

Noch etwas ist bemerkenswert: Da die Sinus- und die Kosinus-Funktion periodisch mit der Periode 2π sind, ist auch die komplexwertige Funktion $f(x) = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$ eine periodische Funktion mit der Periode 2π und damit nicht bijektiv, während die reelle e-Funktion als Funktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}^{>0}$ bijektiv ist.

Wir haben den Potenzbegriff auf imaginäre Exponenten erweitert, indem wir ihn über eine Potenzreihe neu definiert haben, allerdings nur für die Basis e. Ein naheliegender Schritt ist die Erweiterung des Potenzbegriffs zur Basis e auf einen beliebigen komplexen Exponenten z. Wir definieren:

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \frac{1}{3!} \cdot z^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Der Nachweis der Konvergenz dieser Reihe ist nicht viel schwieriger als im reellen Fall.
Man kann diese Definition als Folgerung aus dem Einbettungsprinzip (Kap. i.1) ansehen: Für komplexe Zahlen z mit dem Imaginärteil Null, also für reelle Zahlen z ergibt sich der wohlbekannte Sachverhalt.

Auch das Permanenzprinzip kommt zur Geltung. Wie die reelle e-Funktion erfüllt auch die komplexe e-Funktion $f(z) = e^z$ das **Additionstheorem**

$$\mathbf{f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)}, \qquad \text{also:} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}.$$

Bei der reellen e-Funktion haben wir das Additionstheorem über den Zusammenhang der verschiedenen Charakterisierungen des exponentiellen Wachstums nachgewiesen (Kap. e.2). Weil es in $\mathbb{C}$ keine Ordnungsrelation gibt, steht uns dieser Zusammenhang im komplexen Fall nicht zur Verfügung. Hier ist das Additionstheorem eine Aussage über komplexe Potenzreihen. Es ist zu zeigen:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{z_1}^n}{n!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{z_2}^n}{n!}$$

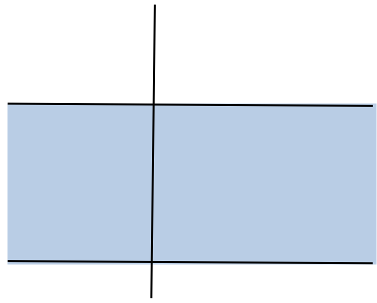
Dass die Gleichung richtig ist, ist keineswegs elementar, der Beweis entsprechend aufwändig. Auf der linken Seite gibt es z.B. den Summanden $\frac{(z_1+z_2)^3}{3!} = \frac{1}{3!}\cdot(z_1^3 + 3\cdot z_1^2\cdot z_2 + 3\cdot z_1\cdot z_2^2 + z_2^3)$. Er muss sich auch aus den Produkten der rechten Seite ergeben! Und Entsprechendes für jedes n.

Setzen wir im Additionstheorem $z_1 = x$ und $z_2 = iy$, dann ergibt sich aus der Eulerschen Formel für eine beliebige komplexe Zahl z mit den kartesischen Koordinaten $z = x + iy$ die Darstellung

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x\cdot(\cos(y) + i\cdot\sin(y));$$

d.h. e^z hat in Polarkoordinaten den Betrag e^x und den Winkel y.

Aus $e^{i\cdot k\cdot 2\pi} = \cos(k\cdot 2\pi) + i\cdot\sin(k\cdot 2\pi) = 1$ für jede ganze Zahl k folgt nach dem Additionstheorem $e^{z+i\cdot k\cdot 2\pi} = e^z\cdot e^{i\cdot k\cdot 2\pi} = e^z\cdot 1 = e^z$.



Es gibt also unendlich viele Potenzen mit der Basis e, die denselben komplexen Wert haben. Genauer kann man das auch so ausdrücken: Jeden Wert, den die komplexe e-Funktion annehmen kann, nimmt sie schon in dem Streifen der Gaußschen Zahlenebene zwischen der reellen Achse und der Parallelen dazu durch die Zahl $2\pi\cdot i$ an.

Bisher haben wir die Erweiterung des Potenzbegriffs auf komplexe Exponenten nur für eine einzige Basis, nämlich e, geschafft. Was ist aber z.B. 2^i oder i^i oder $(-1)^i$? Können wir diesen Ausdrücken überhaupt einen Sinn geben?

Die fundamentale Idee, diesen Ausdrücken Bedeutung zu geben, ist:

Führe die neue Basis auf die Basis e zurück und benutze dann die neue Definition von e^z. .

Der Fall 2^i: Wir kennen eine Zahl y, für die $2 = e^y$ gilt, nämlich $y= \ln(2)$ (Kap. e.3).
Damit könnten wir definieren: $2^i = e^{i\cdot\ln(2)}$
(in Worten: setze in die Potenzreihe von e^{ix} für x die Zahl ln(2) ein).
Mit $\ln(2) = 0{,}69...$ ergibt sich $2^i = e^{0{,}69i} = \cos 0{,}69 + i \sin 0{,}69 = 0{,}77 + 0{,}64\, i$.

Aber Achtung: Die Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten ist wegen der Periodizität der Kosinus- und Sinus-Funktion nicht eindeutig. Es gilt
$2 = 2\cdot e^{i\cdot k\cdot 2\pi} = e^{\ln(2)}\cdot e^{i\cdot k\cdot 2\pi} = e^{\ln(2)+i\cdot k\cdot 2\pi}$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$.
Deshalb definieren wir: $2^i := e^{i\cdot(\ln(2)+i\cdot k\cdot 2\pi)}$ mit beliebigem $k \in \mathbb{Z}$.
(in Worten: setze in die Potenzreihe von e^{ix} statt x den Term $\ln(2) + i\cdot k\cdot 2\pi$ ein).

Wegen des Additionstheorems der komplexen e-Funktion gilt $e^{i\cdot\ln(2)-k\cdot 2\pi} = e^{-k\cdot 2\pi}\cdot e^{i\cdot\ln(2)}$;
d.h. wir erhalten für 2^i unendlich viele komplexe Zahlen. Sie haben alle denselben Winkel $\ln(2) = 0{,}69\ldots \approx 40°$, aber verschiedene Beträge, darunter mit $k = 0$ auch den Betrag 1.

Diese Idee können wir auf eine beliebige <u>positive reelle</u> Basis r übertragen und definieren:
$r^i = e^{i\cdot(\ln(r)+i\cdot k\cdot 2\pi)}$
(in Worten: setze in die Potenzreihe von e^{ix} für x den Term $\ln(r) + i\cdot k\cdot 2\pi$ ein).
Wegen des Additionstheorems der komplexen e-Funktion gilt $r^i = e^{-k\cdot 2\pi}\cdot e^{i\cdot\ln(r)}$;
d.h. wir erhalten für r^i unendlich viele komplexe Zahlen. Sie haben alle denselben Winkel ln(r), aber verschiedene Beträge, darunter mit $k = 0$ auch den Betrag 1.

Der Fall i^i: Die Darstellung von i in Polarkoordinaten lautet in Kurzform $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Wir verfahren wie oben und definieren: $i^i = e^{i\cdot(i\frac{\pi}{2})}$ (in Worten: setze in die Potenzreihe von e^z für z die Zahl $i\cdot\left(i\cdot\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ ein) und erhalten das überraschende Ergebnis: $i^i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ ist eine positive reelle Zahl!

Aber Achtung: Die Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten ist wegen der Periodizität der Kosinus- und Sinus-Funktion nicht eindeutig. Es gilt $i = e^{i\cdot(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi)}$ und wir erhalten $i^i = e^{-(\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi)}$ mit einer beliebigen ganzen Zahl k, also unendlich viele positive reelle Werte, darunter für $k = 0$ den Wert $e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Der Fall $(-1)^i$: Die Darstellung von –1 in Polarkoordinaten lautet in Kurzform: $-1 = e^{i\cdot(\pi+k\cdot 2\pi)}$ mit ganzzahligem k. Wie oben erhalten wir: $(-1)^i = e^{-(\pi+k\cdot 2\pi)}$, also unendlich viele positive reelle Werte, darunter für $k = 0$ auch den Wert $e^{-\pi}$.

Damit haben wir alle Ideen zusammengetragen, um die **Erweiterung des Potenzbegriffs auf eine beliebige komplexe Zahl w als Basis und einen beliebigen komplexen Exponenten z** vorzunehmen. Die Darstellung einer Zahl w in Polarkoordinaten lautet in Kurzform: $w = r\cdot e^{i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi)}$ mit einer positiven reellen Zahl r, mit $0 \leq \varphi < 2\pi$ und mit ganzzahligem k. Mit Hilfe des natürlichen Logarithmus können wir umformen: $r = e^{\ln(r)}$, also $w = e^{\ln(r)}\cdot e^{i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi)} = e^{\ln(r)+i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi)}$ (wegen des Additionstheorems der e-Funktion).

Wir definieren: $w^z = e^{(\ln(r)+i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi))\cdot z}$
(in Worten: setze in die Potenzreihe von e^z statt z den Term $(\ln(r) + i\cdot(\varphi + k\cdot 2\pi))\cdot z$ ein).
Beachte: Ist $w = 0$, also $r = 0$, versagt das Verfahren. 0^z bleibt außer für natürliche Exponenten weiterhin undefiniert.

Damit sind wir am Ende der Verallgemeinerungsleiter für den Potenzbegriff angekommen. Schauen wir noch einmal kritisch zurück. Alles fing mit natürlichen Zahlen an: Eine Potenz ist eine wiederholte Multiplikation derselben Zahl, der Exponent also eine natürliche Zahl. An die Stelle der („alten“) arithmetischen Erweiterung des Potenzbegriffs zu einer beliebigen positiven reellen Basis mit beliebigem reellem Exponenten haben wir eine neue Definition gesetzt, die auf einer funktionalen Sichtweise fußt und das Instrument der Potenzreihe nutzt. Beachte: In der Potenzreihe kommen Potenzen nur in der ursprünglichen Bedeutung als wiederholte Multiplikation, also mit natürlichen Zahlen als Exponenten vor. Damit ist nun die Potenz w^z für eine beliebige von Null verschiedene komplexe Basis w und einen beliebigen komplexen Exponenten z erklärt.

Die Frage ist: Stimmt die neue Definition mit der „alten“ dort überein, wo die „alte“ gilt?
Es sieht ja so aus, als würde es wegen der Periodizität der Sinus- und Kosinus-Funktion für w^z immer unendlich viele Werte geben. Das wäre für natürliche Exponenten ein Widerspruch zur Originaldefinition: Egal ob die Basis w eine natürliche, ganze, rationale, reelle oder komplexe Zahl ist, war w^3 bisher immer eindeutig definiert als wiederholte Multiplikation von w. Und jetzt?
Nach neuer Definition ist $w^3 = e^{(\ln(r)+i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi))\cdot 3}$. Aus dem Additionstheorem ergibt sich $w^3 = e^{\ln(r)\cdot 3}\cdot e^{i\cdot 3\varphi}\cdot e^{i\cdot 3k\cdot 2\pi} = r^3\cdot e^{i\cdot 3\varphi}$, denn $e^{i\cdot 3k\cdot 2\pi} = 1$. Die Zahl w^3 ist also nach wie vor nur ein einziger Punkt in der Gaußschen Zahlenebene. Die Erweiterung des Potenzbegriffs auf komplexe Exponenten liefert also die vertrauten Ergebnisse, wenn der Exponent eine natürliche Zahl ist. Gleiches gilt für ganzzahlige Exponenten, wobei wir die Basis Null ausnehmen müssen.

Setzt man in $w^z = e^{(\ln(r)+i\cdot(\varphi+k\cdot 2\pi))\cdot z}$ die Basis $w = 1$ und den Exponenten $z = \frac{1}{n}$ mit einer beliebigen natürlichen Zahl n ein, so ergibt sich $1^{\frac{1}{n}} = e^{i\cdot\frac{2\pi}{n}\cdot k}$ mit beliebigem ganzzahligen k. Das sind nicht unendlich viele Punkte auf dem Einheitskreis, sondern genau n Punkte, nämlich die, die man erhält, wenn man für k die Zahlen 0 bis n–1 einsetzt, also die n-ten Einheitswurzeln (Kap. i.3).

Ebenso kann man $w^{\frac{1}{n}}$ als n-te Wurzel aus w interpretieren. Das stimmt mit der Aussage in Kap. i.3 überein, dass es n verschiedene solche Wurzeln gibt, und liefert die für Wurzeln aus komplexen Zahlen vertrauten Ergebnisse.

Es scheint, als ob der Verlust des eindeutigen Wertes einer Potenz (außer für ganzzahlige Exponenten) ein zu verschmerzender Tribut ist, den wir bei unserer neuen Definition halt zahlen müssen. Dieser Tribut wiegt allerdings schwerer, als er auf den ersten Blick scheint. Er hat nämlich zur Konsequenz, dass die Potenzgesetze nicht mehr in der gewohnten Form gelten.

Die Regel ${w_1}^z\cdot{w_2}^z = (w_1\cdot w_2)^z$ muss neu interpretiert werden, da auf beiden Seiten der Gleichung Ausdrücke stehen, die im Allgemeinen unendlich viele Werte liefern. Sie bleibt wegen des Additions-theorems der komplexen e-Funktion aber in dem Sinne richtig, dass zu jedem Produkt zweier Werte von ${w_1}^z$ und ${w_2}^z$ auf der linken Seite ein Wert von $(w_1\cdot w_2)^z$ auf der rechten Seite existiert und umgekehrt. (Der Beweis ist nicht schwer.) Das Gleichheitszeichen ist hier also nicht als Gleichheit zweier Werte, sondern als Gleichheit zweier Mengen zu verstehen.

Selbst diese verallgemeinerte Gleichheit hilft aber bei Regel $w^{z_1} \cdot w^{z_2} = w^{z_1+z_2}$ nicht weiter. Im Reellen gilt $1^{\frac{1}{4}} \cdot 1^{\frac{1}{12}} = 1^{\frac{1}{3}}$, wenn wir die Eindeutigkeit der 4. und 12. Wurzel erzwingen, indem wir nur positive Zahlen als Wurzeln zulassen. Nach der neuen Definition mit Hilfe der komplexen e-Funktion ist diese Aussage falsch; denn $e^{i\cdot 0\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}} = e^0 = 1$ ist z.B. eine vierte Wurzel aus 1 und $e^{i\cdot 1\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{12}}$ eine zwölfte Wurzel aus 1, aber $e^{i\cdot 0\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{4}} \cdot e^{i\cdot 1\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{12}} = e^{i\cdot 1\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{12}}$ ist keine dritte Wurzel aus 1.

Man kann das auch so zusammenfassen: Das Potenzgesetz für die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis („Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Exponenten addiert")

- gilt bei der arithmetischen Begriffserweiterung in der Welt der reellen Zahlen für beliebige reelle Exponenten, wenn die Basis positiv ist und als Werte negative Zahlen ausgeschlossen werden;
- gilt in der Welt der komplexen Zahlen für beliebige komplexe Exponenten nur für die Basis e („Additionstheorem der komplexen e-Funktion").

Auch das Potenzgesetz für das Potenzieren von Potenzen $(w^{z_1})^{z_2} = w^{z_1 \cdot z_2}$ („Eine Potenz wird potenziert, indem man die Exponenten multipliziert") gilt in der Welt der komplexen Zahlen nicht mehr. Als Gegenbeispiel kann man die Basis e und die Exponenten $z_1 = z_2 = 1 + 2\pi i$ wählen.

Ist denn dann die neue Definition der Potenz vernünftig, wenn doch die Potenzgesetze nicht mehr gelten und somit das Permanenzprinzip verletzt wird?
Nun, die Kollision war unvermeidlich: Hätten wir bei der arithmetischen Begriffserweiterung negative Zahlen als Basis von Potenzen zugelassen, wären wir im Reellen auf Ungereimtheiten bei der Erweiterung des Potenzbegriffs auf rationale Exponenten gestoßen, wie wir sie als Dilemma in Kap. e.1 beschrieben haben. Das Permanenzprinzip und die gewohnten Potenzgesetze gelten nur noch mit der Einschränkung, dass beim Einsetzen von positiven reellen Zahlen als Basis und von beliebigen reellen Zahlen als Exponent die Mehrdeutigkeit entfällt.
Die neue Definition liefert unter diesen Einschränkungen dasselbe Resultat, erweitert allerdings den Anwendungsbereich des Potenzbegriffs auf die Welt der komplexen Zahlen und macht verständlich, woran es liegt, dass das Permanenzprinzip seine Grenzen hat. Es ist die Periodizität der komplexen e-Funktion und damit der Verlust der Eindeutigkeit bei der Umkehrung des Potenzierens.

Schließlich mussten wir bei der Einführung der komplexen Zahlen auch den Verlust der Ordnung und der damit verbundenen Rechengesetze hinnehmen. Aber das Permanenzprinzip lautet ja auch: Bei der Erweiterung sollen die bisherigen Rechenregeln möglichst weiter gelten.

Finale.3 Faszinierende π-Formeln

Am Beginn des Weges zu der Identität $e^{i\pi} + 1 = 0$ stand die Beschäftigung mit der Zahl π und mit Verfahren, ihren Wert zu berechnen. Einen möglichst genauen Wert zu finden ist eine Sache. Wir lernten dabei aber auch eine Formel kennen, die weniger wegen der Genauigkeit, sondern wegen ihrer besonderen Struktur fasziniert. Nach der Approximation von Vieta gilt (Kap. π.2.4):

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \cdot \ldots$$

Die Formel basiert auf geometrischen Überlegungen. Wir werden nun weitere Formeln kennenlernen, die π in einen faszinierenden Zusammenhang zu besonderen Konstellationen von natürlichen Zahlen bringen. Die Instrumente dazu liefert unsere Tour durch die komplexen Zahlen bis hin zu komplexen Potenzreihen.

Eine zentrale Rolle spielt dabei der Fundamentalsatz der Algebra (Kap. i.5). Den Fundamentalsatz der Algebra kann man auch so formulieren:
Jedes Polynom n-ten Grades $a_0 + a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \cdots + a_n \cdot z^n$ (mit $a_n \neq 0$) (Summenform) kann auch in Produktform geschrieben werden $(-1)^n \cdot a_n \cdot (z_1 - z) \cdot (z_2 - z) \cdot (z_3 - z) \cdot \ldots \cdot (z_n - z)$,
wobei die komplexen Zahlen z_i die Nullstellen der Polynomfunktion sind; dabei muss jede Nullstelle entsprechend ihrer Vielfachheit vorkommen.

Eulers (tollkühne) Idee (deren Folgerungen sich im Nachhinein als richtig herausstellten):

Die Gleichheit von Summenform und Produktform gilt auch für unendliche Reihen und Produkte.

Um daraus Schlussfolgerungen zu ziehen, formte er die Produktform um.
Der Vergleich des Absolutglieds in der Summen- und der Produktform zeigt $a_0 = (-1)^n \cdot a_n \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n$.
Klammert man a_0 aus der Produktform aus, erhält sie die Form:

$$a_0 \cdot \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{z_2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{z_3}\right) \cdot \ \ldots \ \cdot \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$$

Das geht natürlich nur, wenn alle Nullstellen z_k von Null verschieden sind.

Die Gleichheit von Summenform und Produktform wollte Euler speziell auf die Potenzreihe der komplexen Sinus-Funktion anwenden. Die komplexen trigonometrischen Funktionen sind durch ihre Potenzreihen definiert:

$$\sin z = z - \frac{1}{3!} \cdot z^3 + \frac{1}{5!} \cdot z^5 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1},$$

$$\cos z = 1 - \frac{1}{2!} \cdot z^2 + \frac{1}{4!} \cdot z^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot z^{2n}.$$

Verglichen mit der komplexen e-Funktion $e^z = 1 + z + \frac{1}{2} \cdot z^2 + \frac{1}{3!} \cdot z^3 + \cdots + \frac{1}{n!} \cdot z^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ergeben sich die verallgemeinerten Eulerschen Formeln $e^{iz} = \cos z + i \cdot \sin z$ und $e^{-iz} = \cos z - i \cdot \sin z$ und daraus durch Subtraktion $e^{iz} - e^{-iz} = 2i \cdot \sin z$.
Welche Nullstellen hat die komplexe Sinus-Funktion?
$\sin z = 0$ ist gleichbedeutend mit $e^{iz} - e^{-iz} = 0$ bzw. $e^{iz} = e^{-iz}$. Nach dem Additionstheorem ist das äquivalent zu $e^{2iz} = 1$. Setzen wir $z = x + iy$ ein, erhalten wir $e^{2ix} \cdot e^{-2y} = e^{-2y} \cdot (\cos 2x + i \cdot \sin 2x) = 1$.
Die Gleichung ist nur erfüllt, wenn $y = 0$ und $x = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$ ist. Die komplexe Sinus-Funktion hat also nur reelle Nullstellen, und zwar dieselben wie die reelle Sinus-Funktion: $z_n = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
Störend ist dabei, dass Null eine Nullstelle der Sinus-Funktion ist. Deshalb betrachtete Euler die Funktion

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{1}{3!} \cdot z^2 + \frac{1}{5!} \cdot z^4 - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}.$$

Sie nimmt bei Null den Wert 1 an. Ansonsten hat sie dieselben Nullstellen wie die Sinus-Funktion.

Wenn man die Nullstellen, die Vielfachen von π, abwechselnd positiv und negativ nimmt, ergibt sich die Produktdarstellung: $\frac{\sin z}{z} = \left(1 - \frac{z}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2\pi}\right) \cdot \ldots = \left(1 - \frac{z^2}{\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{(2\pi)^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{z^2}{(3\pi)^2}\right) \cdot \ldots$

In der Potenzreihe von $\frac{\sin z}{z}$ hat die Potenz z^2 den Koeffizienten $-\frac{1}{3!}$. Beim Ausmultiplizieren der Produktdarstellung ergibt sich die Potenz z^2 nur, wenn man jeweils eine Klammer auswählt und den Koeffizienten von z^2 in dieser Klammer mit den Einsen aus allen übrigen Klammern multipliziert:

$$-\frac{1}{3!} = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{(2\pi)^2} - \frac{1}{(3\pi)^2} - \ \ldots$$

Die Multiplikation mit $-\pi^2$ liefert

$$\boxed{\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}$$

In Worten: Die **Summe der Kehrwerte aller Quadratzahlen** ist $\frac{\pi^2}{6}$.
Wer hätte den Zusammenhang zwischen den Quadratzahlen und der Kreiszahl je vermutet?

Euler bestätigte mit seiner Methode auch eine schon vorher bekannte Formel. Wir betrachten die Produktform von $\frac{\sin z}{z}$ und setzen für z den Wert $\frac{\pi}{2}$ ein: $\frac{\sin(\frac{\pi}{2})}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$. In der Produktform ergibt sich:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{6^2}\right) \cdot \ldots = \frac{2^2-1}{2^2} \cdot \frac{4^2-1}{4^2} \cdot \frac{6^2-1}{6^2} \cdot \ldots = \frac{(2-1)(2+1)}{2^2} \cdot \frac{(4-1)(4+1)}{4^2} \cdot \frac{(6-1)(6+1)}{6^2} \cdot \ldots = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \ldots$$

Wir bilden den Kehrwert, multiplizieren mit 2 und erhalten:

$$\boxed{\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ldots = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{5 \cdot 7} \cdot \ldots = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \ldots}$$

Diese **Produkt-Formeln mit besonderem Faktoren-Rhythmus** wurden von John Wallis (1616-1703) entdeckt.

Euler bestätigte mit seiner Methode eine weitere Formel, die nach James Gregory (1638-1675) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) benannt ist. Er betrachtete die Funktion f(z) = 1 - sin z; sie hat die doppelten Nullstellen $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$

Summenform: $1 - \sin z = 1 - z + \frac{1}{3!} \cdot z^3 - \frac{1}{5!} \cdot z^5 + \cdots - \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n+1} + \cdots$

Produktform: $1 - \sin z = \left(1 - \frac{z}{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{\frac{\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{\frac{-3\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{\frac{-3\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{\frac{5\pi}{2}}\right) \cdot \left(1 - \frac{z}{\frac{5\pi}{2}}\right) \cdot \ldots$

Vergleicht man die Koeffizienten für die erste Potenz von z in beiden Darstellungen, ergibt sich:

$$-1 = \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\frac{\pi}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\right) + \left(\frac{1}{\frac{3\pi}{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\frac{5\pi}{2}}\right) + \left(-\frac{1}{\frac{5\pi}{2}}\right) \cdot \ldots = \left(-\frac{2}{\pi}\right) \cdot 2 + \left(\frac{2}{3\pi}\right) \cdot 2 + \left(-\frac{2}{5\pi}\right) \cdot 2 + \cdots$$

$$= -\frac{4}{\pi} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

Aus der Multiplikation mit $-\frac{\pi}{4}$ folgt:

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)}}$$

In Worten: Die **alternierende Summe der Kehrwerte aller ungeraden Zahlen** ist $\frac{\pi}{4}$.

Finale.4 π und Kettenbrüche

Für π eine möglichst prägnante Darstellung in dem im jeweiligen Kulturkreis benutzten Zahlensystem - bei uns also im Zehnersystem - zu finden, war schon immer das Bestreben der Mathematiker. Wenn schon kein gewöhnlicher Bruch oder kein periodischer Dezimalbruch, so wäre doch ein Dezimalbruch mit einer erkennbaren Gesetzmäßigkeit schön. Aber die Suche blieb bis heute vergebens.

Man kann reelle Zahlen noch anders als durch Dezimalbrüche darstellen, nämlich durch Kettenbrüche. Die Zahl $\frac{15}{11}$ kann als Dezimalbruch dargestellt werden: $\frac{15}{11} = 1{,}363636\ldots$. Man kann $\frac{15}{11}$ aber auch so darstellen:

$$\frac{15}{11} = 1 + \frac{4}{11} = 1 + \frac{1}{\frac{11}{4}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{3}{4}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{4}{3}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}}}$$

So kann man jede rationale Zahl (die nicht ganzzahlig ist)- ob positiv oder negativ - verwandeln:

- Schreibe die Zahl als gewöhnlichen Bruch und spalte den ganzzahligen Anteil ab (im 1. Schritt so, dass der Rest positiv ist); wenn der Rest als Bruch den Zähler 1 hat, beende das Verfahren.
- Sonst stelle den Rest als Doppelbruch mit dem Zähler 1 dar; spalte im Nenner des Doppelbruchs den (positiven) ganzzahligen Anteil ab; wenn der Rest als Bruch den Zähler 1 hat, beende das Verfahren.
- Sonst stelle den Rest als Doppelbruch mit dem Zähler 1 dar; usw..

Das Verfahren erinnert an den euklidischen Algorithmus, bei dem man durch fortgesetzte Division mit Rest den größten gemeinsamen Teiler zweier natürlicher (oder ganzer) Zahlen bestimmt (und hat auch tatsächlich etwas damit zu tun). Wichtig ist, dass der euklidische Algorithmus abbricht. Das Gleiche gilt für das obige Verfahren.

Das Resultat heißt **regulärer Kettenbruch** und hat die nebenstehende Form mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1$.
Analog zu den Dezimalbrüchen, wo ja die zu der Ziffer gehörige Zehnerpotenz durch die Stelle, an der die Ziffer steht, festgelegt ist, werden auch reguläre Kettenbrüche in Kurzform notiert: $[a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots]$

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Beispiele:

$0{,}7 = [0; 1{,}2{,}3]$ $\quad$ $2{,}5 = [2; 2]$ $\quad$ $-2{,}5 = [-3; 2]$ $\quad$ $3{,}14 = [3; 7.7]$

Einen endlichen regulären Kettenbruch kann man leicht wieder in einen gewöhnlichen Bruch verwandeln. Es gilt sogar: Ein regulärer Kettenbruch ist genau dann endlich, wenn die zugehörige Zahl rational ist. Das unterscheidet also die Kettenbruch-Darstellung von der Dezimalbruch-Darstellung: Ein periodischer Dezimalbruch hat eine unendliche Dezimalbruchentwicklung, aber eine endliche Kettenbruchentwicklung (das sieht man z.B. oben bei der Verwandlung des periodischen Dezimalbruchs 15/11 in einen Kettenbruch). Folglich ist eine reelle Zahl genau dann irrational, wenn ihre Kettenbruchentwicklung unendlich ist.

Einige irrationale Zahlen lassen sich besonders leicht in einen Kettenbruch entwickeln, z.B $\sqrt{2}$. Für $x = \sqrt{2}$ gilt $x^2 = 2$, folglich $x^2 - 1 = 1$ bzw. $(x-1)(x+1) = 1$, also $x - 1 = \frac{1}{x+1}$. Hieraus ergibt sich $x = 1 + \frac{1}{1+x} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}} = 1 + \frac{1}{1+1+\frac{1}{1+1+\frac{1}{1+x}}} = \cdots$. Also ist $\sqrt{2} = [1; 2,2,2, \dots]$, ein periodischer Kettenbruch.

Weitere Beispiele sind $\sqrt{3} = [1; 1,2,1,2,1,2, \dots]$, $\sqrt{7} = [3; 1,1,4,1,1,4,1,1,4, \dots]$, $\sqrt{0{,}5} = [0; 1, 2,2,2, \dots]$. Man kann zeigen, dass alle irrationalen Zahlen, die Lösung einer quadratischen Gleichung mit rationalen Koeffizienten sind, periodische Kettenbruchentwicklungen haben.

Auch die Zahl e - die irrational ist, wie wir noch sehen werden - hat eine interessante unendliche Kettenbruchentwicklung. Sie ist zwar nicht periodisch. Aber es lässt sich eine einfache Regel erkennen: $e = [2; 1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,1,1,10,1,1,12, \dots]$.

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}$$

Man könnte nun meinen, dass man auch für π einen „schönen“ regulären Kettenbruch findet, wenn schon keinen endlichen oder unendlich-periodischen, dann doch einen mit einer erkennbaren Gesetzmäßigkeit. John Wallis berechnete 1685 mithilfe der 34 Dezimalstellen von Ludolph Van Ceulen (Kap. π.1.3) die ersten 33 Kettenbruch-Elemente von π aus:
$\pi = [3; 7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,1,1,15,3,13,1,4,2,6,6, . \dots]$.
Leider weisen weder sie noch die ersten 20 Milliarden Glieder ein Muster auf.

Warum das Ganze? Warum der Aufwand?
Bricht man die Kettenbruchentwicklung nach endlich vielen Schritten ab und macht dann aus dem endlichen Kettenbruch einen gewöhnlichen Bruch, so erhält man ausgezeichnete Approximationen von π.

$$\pi \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7} = 3,\overline{142857}$$

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106} = 3{,}141509 \dots$$

$$\pi \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113} = 3{,}141592 \dots$$

Man kann zeigen: Alle abgeschnittenen Kettenbrüche sind beste Näherungen an π. Dabei heißt ein Bruch $\frac{m}{n}$ eine „beste Näherung“ von π, wenn jeder andere Bruch, der näher oder ebenso nahe an π liegt wie $\frac{m}{n}$ einen größeren Nenner hat. Für den Näherungsbruch $\frac{333}{106}$ gilt beispielsweise: Alle Brüche mit kleinerem Nenner als 106, liegen, unabhängig davon wie der Zähler gewählt wird, weiter von π entfernt als $\frac{333}{106}$.

Man kann sogar weiter zeigen, dass der Abstand eines Näherungsbruchs $\frac{m}{n}$ von π kleiner als $\frac{1}{n^2}$ ist, im Falle des Näherungsbruchs $\frac{333}{106}$ also kleiner als ein Zehntausendstel.

$$a_0 + \cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cfrac{b_3}{a_3 + \cfrac{b_4}{\ddots}}}}$$

Das ist zwar auch schon eine bemerkenswerte Eigenschaft von Kettenbrüchen. Allerdings bleibt der Wunsch nach einer „schönen“ Darstellung von π unerfüllt. Das ändert sich, wenn man zu einer allgemeineren Form von Kettenbrüchen übergeht, nämlich zu Brüchen der nebenstehenden Form mit $a_0 \in \mathbb{Z}$ und $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ für $i \geq 1$. Ein solcher Kettenbruch ist genau dann regulär, wenn alle b_i den Wert 1 haben.

Die folgenden Kettenbruchentwicklungen fallen auch in die Rubrik „faszinierende π-Formeln“, denn sie haben ein besonders einfaches Muster. Sie sind leider nicht regulär; sonst wäre damit schon bewiesen, dass π irrational ist.

William Brouncker 1632

$$\frac{4}{\pi} = 2 + \cfrac{1^2}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{2 + \cdots}}}}$$

Heinrich Lambert 1770

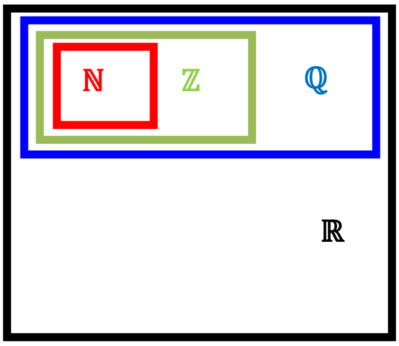
$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1^2}{3 + \cfrac{2^2}{5 + \cfrac{3^2}{7 + \cfrac{4^2}{9 + \cdots}}}}$$

Leonard Euler 1739

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{6}{1 + \cfrac{12}{1 + \cfrac{20}{1 + \cdots}}}}}$$

Finale.5 e und π in der Welt der reellen Zahlen

In Kap. i.1 haben wir die Zahlbereichserweiterungen, ausgehend von der Menge ℕ der natürlichen Zahlen über die Menge ℤ der ganzen Zahlen und die Menge ℚ der rationalen Zahlen zunächst bis zur Menge ℝ der reellen Zahlen skizziert.
In diesem Abschnitt wollen wir die Zahlen e und π hierin einordnen und noch eine besondere Klassifizierung der reellen Zahlen kennenlernen.



Rationale und irrationale Zahlen
„Rational“ heißen diese Zahlen, weil sie sich als Verhältnis (lat. ratio), als Bruch, schreiben lassen. Ihre Komplementärmenge hinsichtlich der reellen Zahlen bilden die irrationalen Zahlen.

<u>e ist eine irrationale Zahl.</u>
Der Beweis ist wie der bekannte Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ ein Widerspruchsbeweis, aber etwas komplizierter. Wir legen die Reihenentwicklung von e zugrunde: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} \cdot + \ldots$.
Aus ihr folgt unmittelbar, dass e größer als 2 ist. Wir zeigen, dass e kleiner als 3 ist.

Wir schätzen zunächst die Summanden der Reihe ab: $\frac{1}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ für n≥2,

und dann die e-Reihe: $e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \ \ldots\ < \ 1 + 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ \ldots$

Rechts steht eine geometrischen Reihe, für die gilt $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ \ldots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Also ist e kleiner als 3.

Nun führen wir den Widerspruchsbeweis und benutzen dazu wieder die Reihenentwicklung von e.
Angenommen, e ließe sich als Bruch darstellen: $e = \frac{p}{q}$ mit p,q ∈ ℕ; d.h.

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{q!} + \frac{1}{(q+1)!} + \ldots \qquad (\circledast)$$

Da e zwischen 2 und 3 liegt, ist e keine natürliche Zahl, also muss q mindestens 2 sein.
Wir multiplizieren beide Seiten der Gleichung mit q!.
Auf der linken Seite der Gleichung ergibt sich p·(q-1)!, also eine natürliche Zahl.
Auf der rechten Seite sind nach dem Ausmultiplizieren die ersten (q+1) Summanden natürliche Zahlen, ihre Summe folglich auch. Die restlichen Summanden dagegen sind Brüche, beginnend mit $\frac{q!}{(q+1)!} = \frac{1}{q+1} \leq \frac{1}{3}$.
Sie lassen sich ähnlich wie oben durch Potenzen von $\frac{1}{3}$ abschätzen. Für die Summe dieser Brüche ergibt sich dann mit Hilfe der geometrischen Reihe

$$\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots \leq \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Fazit: Die Multiplikation der Gleichung ($\circledast$) mit q! führt auf der linken Seite zu einer natürlichen Zahl, auf der rechten Seite zu der Summe einer natürlichen Zahl und einer Zahl kleiner als $\frac{1}{2}$. Widerspruch!

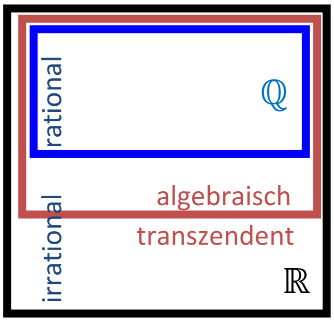
<u>π ist eine irrationale Zahl.</u>
Es gibt mehrere Beweise, alle sind schwieriger als der obige. Der deutsche Mathematiker Heinrich Lambert wies 1761 mit Hilfe einer Kettenbruchentwicklung (Kap. Finale.4) die Irrationalität von π nach.

Algebraische und transzendente Zahlen

Die reellen Zahlen lassen sich auf verschiedene Weise charakterisieren, am einfachsten dadurch, dass jeder reellen Zahl ein endlicher oder unendlicher (periodischer oder nicht-periodischer) Dezimalbruch entspricht, und zwar auf umkehrbar eindeutige Weise, wenn man die Perioden 0 und 9 ausschließt (denn bekanntlich ist ja z.B. $0{,}5 = 0{,}4\overline{9}$). Rationale Zahlen lassen sich durch endliche oder periodische Dezimalbrüche darstellen. Die Wurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, lässt sich nur durch einen unendlichen nicht-periodischen Dezimalbruch darstellen. Aber nicht jeder unendliche nicht-periodische Dezimalbruch ist Wurzel einer positiven rationalen Zahl; d.h. es gibt (positive) irrationale Zahlen, die man nicht durch Wurzelziehen positiver Radikanden erhält. Das führt neben der Einteilung der reellen Zahlen in rationale und irrationale zu einer zweiten Einteilung.

Rationale Zahlen $\frac{m}{n}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ lassen sich als Lösung von linearen Gleichungen $m + n \cdot x = 0$ mit $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ charakterisieren. Eine Verallgemeinerung dieser Idee ist, statt linearer Gleichungen algebraische Gleichungen n-ten Grades $b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots + b_n \cdot x^n = 0$ mit <u>ganzzahligen</u> Koeffizienten b_i und $b_n \neq 0$ zu betrachten. (Dividiert man eine solche Gleichung durch b_n, erhält man eine algebraische Gleichung der Form $a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + x^n = 0$ <u>mit rationalen Koeffizienten</u> a_i; sie hat dieselben Lösungen wie die obige Gleichung.) Solche algebraischen Gleichungen können reelle Zahlen als Lösungen haben - müssen aber nicht, wie das Beispiel $1 + x^2 = 0$ zeigt.

Man nennt <u>reelle</u> Zahlen, die Lösung einer solchen algebraischen Gleichung sind, <u>algebraische Zahlen</u>, die übrigen reellen Zahlen heißen <u>transzendente Zahlen</u>.



Beachte: Diese Unterscheidung macht nur Sinn durch die Bedingung, dass die Koeffizienten der algebraischen Gleichung ganze bzw. rationale Zahlen sind. Würde man auch irrationale Zahlen als Koeffizienten zulassen, wäre jede reelle Zahl a algebraisch, da sie die Gleichung $a - x = 0$ löst.

Rationale Zahlen sind immer algebraisch, transzendente Zahlen sind immer irrational.

Beispiele für algebraische Zahlen (in Klammern eine algebraische Gleichung, deren Lösung sie sind):

$7 \quad (7 - x = 0) \qquad \sqrt{5} \quad (5 - x^2 = 0) \qquad 1 + \sqrt{2} \quad (1 + 2x - x^2 = 0) \qquad \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} \quad (1 + 2x^3 - x^6 = 0)$

<u>e und π sind transzendente Zahlen.</u>

Weitere Beispiele für transzendente Zahlen

$\pi \quad 3\pi \quad \pi^2 \quad \pi + 7 \qquad e \quad 5e \quad e^3 \quad e + 4$

Der Nachweis der Transzendenz einer Zahl ist in der Regel schwieriger als der Nachweis der Irrationalität. 1873 bewies der französische Mathematiker Charles Hermite (1822–1901), dass die Eulersche Zahl e transzendent ist. Auf Hermites Methode aufbauend, bewies 1882 der deutsche Mathematiker Carl Louis Ferdinand von Lindemann (1852–1939) die Transzendenz der Kreiszahl π.

Nun schließt sich der Kreis zu einem antiken Problem, das wir in Kap. i.5 behandelt haben, der <u>Quadratur des Kreises</u>. Wie hängen beide Probleme zusammen? Mit Zirkel und Lineal konstruiert man Kreise und Geraden und deren Schnittpunkte. Durch Einführung von kartesischen Koordinaten kann man Geraden und Kreise durch lineare und quadratische Gleichungen beschreiben. Startet man mit rationalen Koordinaten muss man für die Koordinaten von Schnittpunkten schon Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen zulassen und im nächsten Schritt auch Quadratwurzeln aus solchen Quadratwurzeln, also Lösungen von komplizierteren algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten usw..

Fazit: Mit Zirkel und Lineal lassen sich solche und nur solche Punkte konstruieren, deren Koordinaten Lösungen von algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten, also algebraische Zahlen, sind. Die Zahl π ist aber transzendent, kann sich also nicht als Koordinate eines konstruierbaren Punktes ergeben. Damit ist die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises bewiesen.

Welch eine Entwicklung der Mathematik über 2000 Jahre war nötig, um dieses Ergebnis zu erhalten!

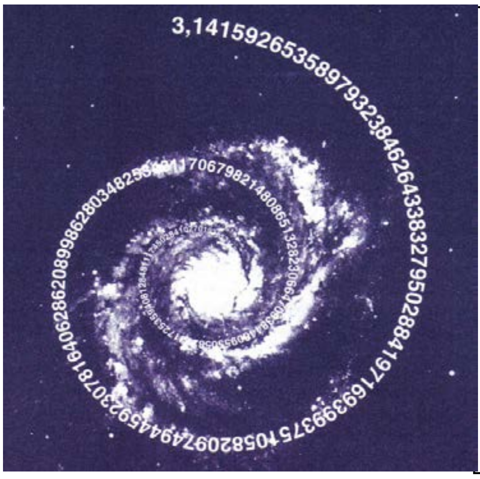
Unser heutiges Wissen über transzendente Zahlen ist noch sehr begrenzt. Während die Transzendenz und damit auch die Irrationalität, von e^{π} bewiesen ist, sind $e + \pi$, $e \cdot \pi$, π^{π}, e^{e} und π^{e} Zahlen, deren Irrationalität vermutet wird, aber noch nicht bewiesen ist, folglich auch nicht ihre Transzendenz.

Um so verblüffender ist die Antwort auf die Frage „Wie viele Zahlen gibt es von jeder Sorte, den algebraischen und den transzendenten Zahlen?“, die Georg Cantor (1845–1918) im Jahre 1874 gab. Natürlich gibt es unendlich viele von beiden Sorten. Aber es gibt Stufen der Unendlichkeit. Die niedrigste Stufe ist die der Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen. Sie heißt <u>abzählbar unendlich</u>. Ebenso nennt man jede Menge abzählbar unendlich, die sich bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden lässt; denn das bedeutet mathematisch „genauso viele Elemente haben“ und anschaulich „sich in einer Liste darstellen lassen“. Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar unendlich; das 1. Cantorsche Diagonalverfahren zeigt, wie man die rationalen Zahlen auflisten kann.

Die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist <u>überabzählbar unendlich</u>; denn wie man durch Widerspruchsbeweis mit dem 2. Cantorschen Diagonalverfahren zeigen kann, ist es schon unmöglich, die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 in einer Liste aufzuführen. Dann muss auch die Menge der irrationalen Zahlen überabzählbar unendlich sein; wäre sie nämlich abzählbar unendlich, würde man durch abwechselnde Entnahme aus den beiden Listen (der rationalen und der irrationalen Zahlen) eine Liste der reellen Zahlen erstellen können. In diesem Sinne gibt es also „mehr“ irrationale Zahlen als rationale.

Die Menge der algebraischen Zahlen, die ja die rationalen Zahlen enthält, aber auch komplizierte Wurzeln aus rationalen Zahlen, ist „nicht wesentlich größer“ als die Menge der rationalen Zahlen, soll heißen: ist abzählbar unendlich. Dieses überraschende Ergebnis bewies Cantor 1874. Folglich muss die Menge der transzendenten Zahlen überabzählbar unendlich sein.

Salopp formuliert heißt das:
Es gibt weniger „vertraute Zahlen“ (natürliche, gebrochene, ganze Zahlen, Wurzeln) als Zahlen vom Typ π.



Quelle: Jean-Paul Delahaye, π - die Story, Birkhäuser 1999

Du weißt jetzt etwas über π.
Und umgekehrt?
„π kennt dich!“
Die Wahrscheinlichkeit, dass dein Geburtsdatum
als Ziffernfolge in der Dezimalbruchentwicklung
von π vorkommt,
ist 1,
ein sicheres Ereignis!
Die Internet-Seite
http://www.angio.net/pi/piquery
hilft dir bei der Suche.