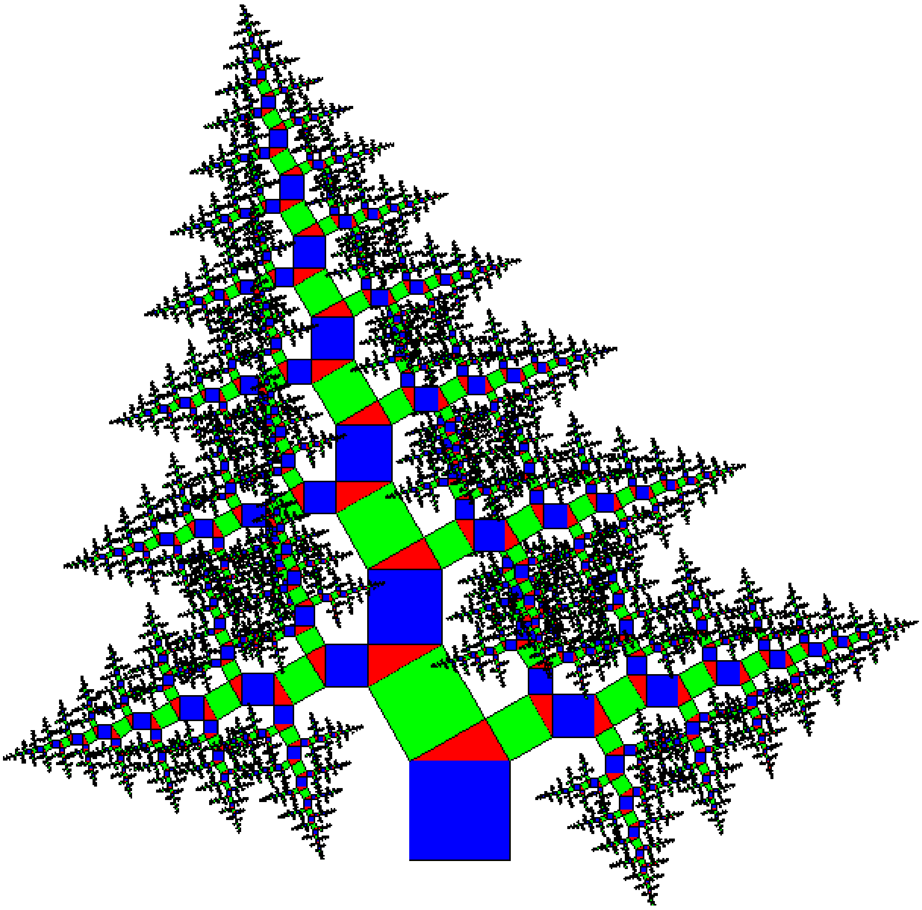


2009

Pythagoras‘ Weihnachtsvorlesung

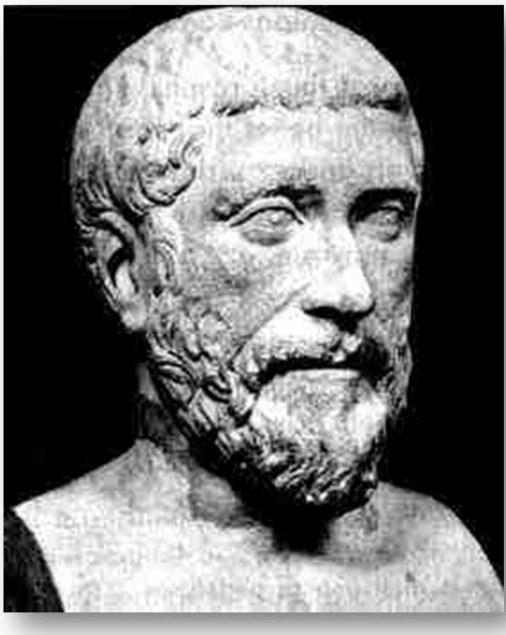
Hans-Dieter Rinkens

Elemente der Geometrie

WS 2009/10

18.12.2009

Mein Name ist Pythagoras.



570-475 v.Chr.

Meine Mutter hieß Pythais und stammte aus Samos, mein Vater Mnesarchos war ein Geschäftsmann aus Tyros in Syrien. Soweit mein Migrationshintergund.

In einer Biografie über mich steht: Mnesarchos wollte mit seiner Frau – „als ihre Schwangerschaft noch unerkannt war“ – eine Dienstreise nach Syrien machen und befragte das Orakel in Delphi, wie die Fahrt verlaufen werde. Die Seherin Pythia prophezeite ihm eine sehr profitable Reise und fügte hinzu: „Deine Frau ist schwanger und wird ein Kind gebären, das an Schönheit und Weisheit die Menschen aller Zeiten überragen und dem Menschengeschlecht von größtem Nutzen sein wird.“

So geschah es. Ich kam um 570 v.Chr. auf der Insel Samos zur Welt.

Bis zur Stadt Milet auf dem Festland waren es nur wenige Tagesreisen. Dort in Milet lebte zu der Zeit Thales, den Sie ja alle aufgrund des rechten Winkels kennen. Ich traf ihn als 20jähriger, da war er schon 80.

Dank der Empfehlungen meines Onkels durchlief ich eine gründliche Schule bei den besten Philosophen meiner Zeit. Außerdem nahm mich mein Vater oft mit auf seine Reisen in den Nahen Osten, u.a. nach Chaldäa und Syrien, und nach Italien. Reisen bildet! Dank meines betuchten Vaters konnte ich mir ein Langzeitstudium leisten. Mit 35 wollte ich meine Studien in der Mathematik vertiefen. Das ging am besten bei den ägyptischen Priestern. Ich packte drei silberne Pokale aus dem Geschäft meines Vaters, erhielt ein Empfehlungsschreiben des Herrschers von Samos, des Tyrannen Polykrates, an den befreundeten Pharaon Amasis und fuhr mit dem nächsten Schiff ab. Nebenbei bemerkt, auch damals lief schon alles nur mit Schmiergeld und Empfehlungsschreiben!

Es folgte eine schöne Zeit. Ich besuchte viele Tempel und diskutierte mit den Priestern. In einem Tempel wurde ich sogar mit allen notwendigen Riten zum Mitglied der Priesterschaft geweiht. Ich lernte viele Gebräuche kennen, die ich später in meinem Club in Italien eingeführt habe, so z.B. das Prinzip der Geheimhaltung und die vegetarische Lebensweise, sowie das Verbot Tierhäute zu tragen oder Bohnen zu essen.

Diese schöne Zeit ging 10 Jahre später abrupt zu Ende. Da wurde Ägypten vom König von Persien, Cambyses II, überfallen. Er gewann die entscheidende Seeschlacht im Nildelta (übrigens hatte Samos mal wieder die Seiten gewechselt und war nun auf der Seite der Sieger). Ägypten streckte die Waffen. Ich wurde als Kriegsgefangener nach

Babylon gebracht. Zum Glück verstanden die Babylonier viel von Arithmetik und Musik, so dass auch diese Zeit nicht nutzlos für mich war.

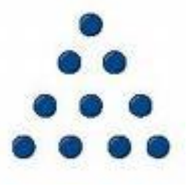
Als Spätheimkehrer kam ich nach Samos zurück. (Fragen Sie mich nicht, wie mir das gelang.) Ich war inzwischen fast 50 und wurde Privatlehrer des Sohns von Polykrates, des Herrschers von Samos. Auf diesen Polykrates möchte ich hier zwei Worte verschwenden. Er war einer der größten Schurken des 6. Jahrhunderts. Er war nämlich nicht, was Sie sich unter einem Herrscher oder Regierungschef vorstellen, sondern ein echter Pirat: Mit seinen Schiffen überfiel er jeden, der es wagte, sich den ionischen Küsten zu nähern. In der Außenpolitik verbündete er sich stets mit den Schlimmsten, wechselte aber immer rechtzeitig die Fahne, wenn er merkte, dass der Wind drehte. Ein Charaktermensch eben. An seinem Hofe ging es entsprechend zu, er prasste immer mit ein paar Intellektuellen und hundert jungen Mädchen und anmutigen Knaben.

Dieses ausschweifende Leben gefiel mir ganz und gar nicht. Ich hielt es deshalb nur zwei Jahre in Samos aus. Dann beschloss ich, mich noch einmal einzuschiffen und nach Kroton an der Küste Süditaliens überzusetzen. Dort bot mir die Ältestenversammlung an, die Jugend griechische Weisheit zu lehren und ich nutzte die Chance. Ich gründete einen Club von 300 Schülern. Sie nannten sich die Pythagoreer. Wir lebten in Gütergemeinschaft. Mit Hilfe meines Vereins bekam ich allmählich alle Hebel der Macht in die Hand.

Ein paar Regeln meines Clubs will ich Ihnen verraten – „verraten“ sage ich deshalb, weil es ein Geheimbund war –:

- Mein Wort war Gesetz.
- Bei Sonnenuntergang mussten sich die Clubmitglieder stets drei Fragen stellen:
  1. Was habe ich Schlechtes getan?
  2. Was habe ich Gutes getan?
  3. Was habe ich versäumt zu tun?
- Danach mussten sie den folgenden Satz aussprechen:
  „Ich schwöre es auf Jenen, der unserer Seele die göttliche tetraktys offenbart hat.“

NEIN, BEI DER LUFT,
DIE ICH ATME,
NEIN, BEI DEM WASSER,
DAS ICH TRINKE,
ICH DULDE KEINEN
WIDERSPRUCH.



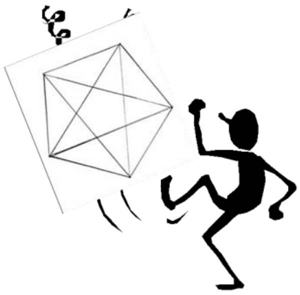
Merken Sie sich noch zwei meiner Weisheiten. Sie sind grundlegend für Ihre Bildung.

GEOMETRIE IST EWIGES WISSEN.

ALLES IST ZAHL.

Was die Zahlen angeht, musste ich tatsächlich einen mächtigen Schock verkraften. Ich war fest davon überzeugt, dass sich alles in dieser Welt durch natürliche Zahlen oder ihr Verhältnis beschreiben lässt. Alle Musiker unter Ihnen kennen zum Beispiel die Zahlenharmonie der Akkorde.

Können Sie sich meine Enttäuschung vorstellen, als ich eines Tages feststellte, dass das Verhältnis zwischen der Diagonale und der Seite eines Quadrates keineswegs das Verhältnis zweier natürlicher Zahlen ist? Wie war das möglich? Wenn bisher alles den Gesetzen der Harmonie zu gehorchen schien, wie konnte da nun plötzlich ein so unverständliches Streckenverhältnis zum Vorschein kommen?
Dabei hatte ich doch selber entdeckt, dass das Quadrat über der Hypotenuse genauso groß wie die beiden Kathetenquadrate zusammen ist. Und nun sträubten sich ausgerechnet Hypotenuse und Kathete, in einem ganzzahligen Verhältnis zu stehen!



Ähnliches gilt übrigens für mein geliebtes Pentagon: Die Seite und die Diagonale haben kein gemeinsames Maß. Ein Gräuel!

Die Entdeckung war ein schwerer Schlag für mich. Und um das Unglück voll zu machen, erzählte einer meiner Schüler, der Verräter Hippasos, die Nachricht überall herum. Ich bin überzeugt: nur um dem Club zu schaden. Was die Geheimhaltung betraf, kannte ich keine Gnade für Gesetzesbrecher. Mein Fluch verfolgte den Verräter, als er verzweifelt versuchte, übers Meer zu fliehen. Er erlitt wenige Meilen vor Kroton Schiffbruch.

Drum merke: Wer meine Lehren nicht befolgt, erleidet Schiffbruch.

Noch so eine Geschichte:
Apollodor berichtet, dass ich den Göttern 100 Ochsen geopfert haben soll, als ich meinen berühmten Satz entdeckt habe. Mal abgesehen davon, dass ich ihn gar nicht entdeckt habe – meine Lehrer im Nahen Osten kannten ihn längst –, Apollodor ist ein Ochse: er musste doch wissen, dass ich Vegetarier war.

Adalbert von Chamisso hat die Geschichte allerdings anders gedeutet:

Vom Pythagoräischen Lehrsatz

Die Wahrheit, sie besteht in Ewigkeit,
Wenn erst die blöde Welt ihr Licht erkannt;
Der Lehrsatz, nach Pythagoras benannt,
Gilt heute, wie er galt zu seiner Zeit.

Ein Opfer hat Pythagoras geweiht
Den Göttern, die den Lichtstrahl ihm gesandt;
Es thaten kund, geschlachtet und verbrannt,
Einhundert Ochsen seine Dankbarkeit.

Adalbert von Chamisso
1781 – 1838

Die Ochsen seit dem Tage, wenn sie wittern,
Daß eine neue Wahrheit sich enthülle,
Erheben ein unendliches Gebrülle;

Pythagoras erfüllt sie mit Entsetzen;
Und machtlos, sich dem Licht zu widersetzen,
Verschließen sie die Augen und erzittern.

Pythagoras

vor der Erfindung seines Lehrsatzes

und ***nach*** der Erfindung desselben.

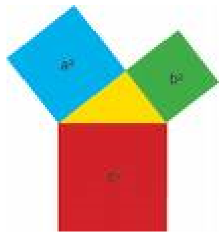
Apropos Ochsen: Neulich erzählte mir jemand, wenn er seine Zuhörerschaft nach meinem Satz fragte, schallte ihm immer entgegen:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

Mal abgesehen davon, dass mir sämtliche Zeichen und ihre Bedeutung fremd waren – ich kannte weder Variable noch Gleichungen –: Was soll denn a, b, c sein?

Mein Satz lautet:

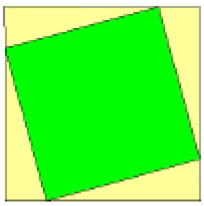
> Im rechtwinkligen Dreieck hat
> das Hypotenusenquadrat dieselbe Fläche wie
> die beiden Kathetenquadrate zusammen.

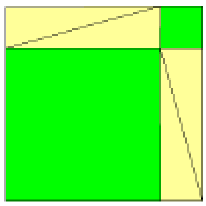


Pythagoras-Figur

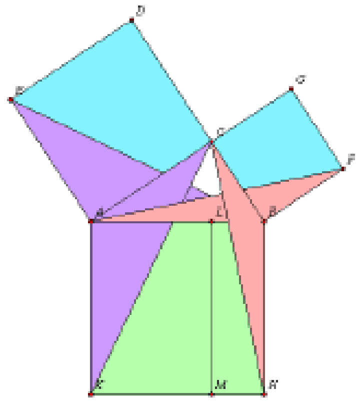
Wer die Jugend Geometrie lehren will, muss mindestens fünf Begründungen für diese Aussage kennen.

Einfach zu verstehen ist der sog. Indische Zerlegungsbeweis. Er hat nur den Nachteil, dass man meine berühmte „Pythagoras-Figur“, das rechtwinklige Dreieck mit den aufgesetzten drei Quadraten, nicht in ein und derselben Figur sieht.

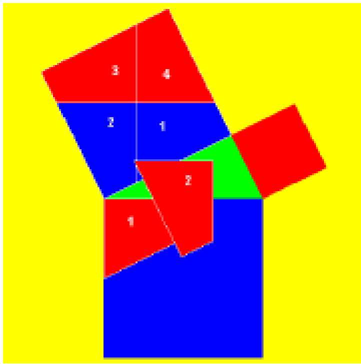




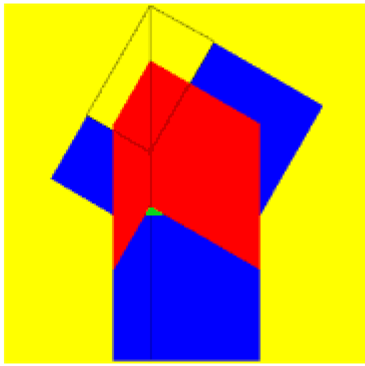
Der klassische Beweis benutzt die Kongruenzsätze und die Kenntnis, dass ein Dreieck den halben Flächeninhalt hat wie ein Quadrat oder ein Rechteck mit gleicher Grundseite und Höhe. Eigentlich ist er nichts anderes als die doppelte Anwendung der Beweisführung, die Euklid 200 Jahre nach mir für seinen Kathetensatz benutzt hat. Im Vertrauen: Ich nenne diesen Beweis gerne den „Tänzerinnen-Beweis“, weil mich die Beweisfigur irgendwie an den Hof des Polykrates erinnert. Aber Sie sind die einzigen, denen ich das erzähle.

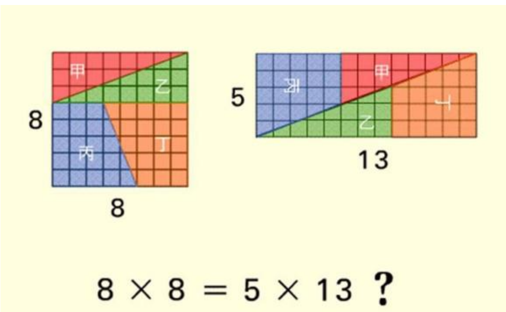


Während die obigen Argumentationen eher statischer Natur sind, kann man die folgenden beiden mit Recht dynamisch nennen. Im Translationsbeweis zerschneidet man das größere Kathetenquadrat in vier kongruente Vierecke, die durch Verschieben genau in die Ecken des Hypotenusenquadrats passen. In der Mitte bleibt der genau Platz übrig, in den man das kleinere Katheten-quadrat hineinschieben kann. Ich habe hier zweimal „genau“ gesagt; das wäre natürlich genau zu belegen.



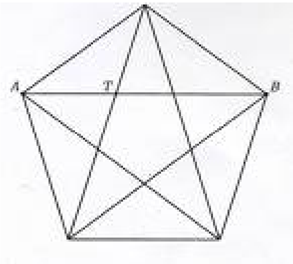
Beim Scherungsbeweis stelle ich mir immer vor, als würde Flüssigkeit fließen: Das Hypotenusenquadrat teilt sich in zwei Rechtecke, diese werden zu flächengleichen Parallelogrammen, die sich noch oben verschieben, um sich dann über Zwischenstufen in die beiden Katheten-quadrate zu verwandeln. Dass das mit dem Verschieben klappt, dass die Flächen immer gleich groß bleiben, da reicht es nicht zu sagen: „Das sieht man doch.“ Da muss man ordentlich argumentieren.





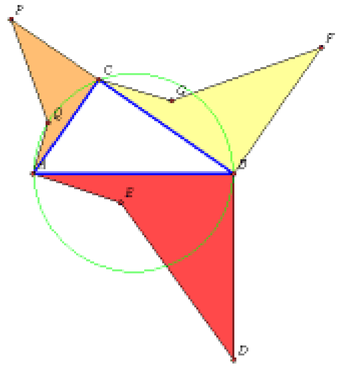
Dass man seinen Augen nicht immer trauen kann, lehren uns die Chinesen mit diesem Bild: Das Quadrat wird in zwei Trapeze und zwei Dreiecke zerlegt, die dann „genau“ zu einem Rechteck zusammen gelegt werden. Vergleichen Sie die Flächeninhalte von Quadrat und Rechteck. Sie werden verblüfft feststellen, dass Sie soeben bewiesen haben: 64 = 65. „Das sieht man doch.“

Übrigens: Diese Zahlenspielerei hat etwas zu tun mit einer Folge von Zahlen (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...), die nach Leonardo von Pisa, dem Sohn des Bonaccio (filius bonacii), als Fibonacci-Zahlen bezeichnet werden. Auch sein Vater war Geschäftsmann und wie ich konnte er durch Reisen seine mathematischen Interessen vertiefen, die allerdings mehr auf dem Gebiet des Rechnens lagen.

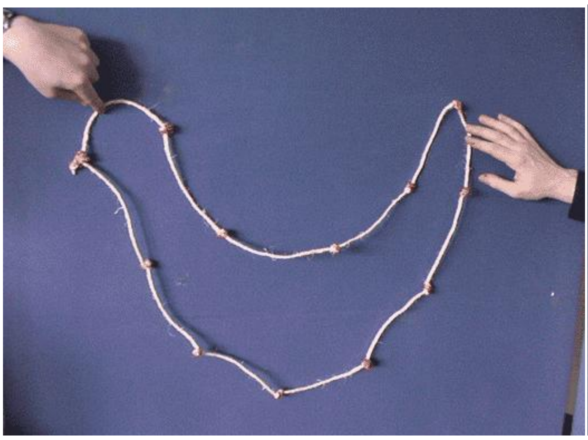
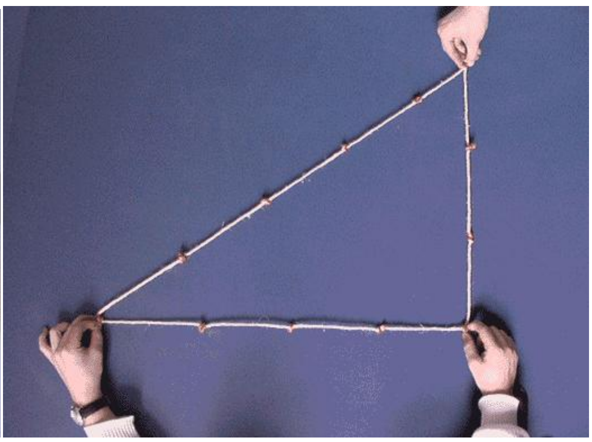


Eine Verbindung gibt es schon noch zwischen Fibonacci und mir: Das Verhältnis zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich, je größer die Zahlen werden, immer mehr dem Verhältnis von Diagonale und Seite in meinem geliebten Pentagon. Das ist das Verhältnis des Goldenen Schnitts, bei dem eine Strecke so geteilt wird, dass die ganze Strecke sich zum größeren Abschnitt verhält wie der größere Abschnitt zum kleineren.

Aber nun zurück zu „meinem“ Satz! Die eleganteste Argumentation, aber wie ich aus Erfahrung mit meinen Schülern weiß, der in seiner Gedankenführung wohl schwierigste der hier vorgestellten Beweise ist der Ähnlichkeitsbeweis. Er geht über eine verallgemeinerte Beweisfigur: Die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind Seiten zueinander ähnlicher Vielecke. Da sich die Flächeninhalte ähnlicher Vielecke verhalten wie die Quadrate entsprechender Seitenlängen, ist das Verhältnis der Fläche der beiden Kathetenvielecke zusammen zur Fläche des Hypotenusenvielecks für alle Vielecke dasselbe, gleich ob es sich um Vierecke, Quadrate, Dreiecke, ... handelt. Dass dieses Verhältnis Eins ist, sieht man durch spezielle Wahl des Vielecks: Man nehme als Hypotenusenvieleck das rechtwinklige Ausgangsdreieck.



Ich erwähnte schon, dass die Aussage „meines“ Satzes schon meinen Altvorderen bekannt war. Sie benutzten ihn unter anderem, um praktische Probleme des täglichen Lebens zu bewältigen, zum Beispiel um beim Bauen rechte Winkel einzuhalten. Sie konstruierten den rechten Winkel mit Hilfe des Zwölf-Knoten-Seils. Das Seil wird durch zwölf Knoten in zwölf gleich große Längeneinheiten geteilt. Wird das Seil am ersten, vierten und achten Knoten gespannt, entsteht am vierten Knoten ein rechter Winkel. Dass das so ist, liegt an den besonderen Zahlen 3, 4 und 5 (Summe 12): Ein Dreieck mit diesen Seitenlängen ist rechtwinklig; denn $9 + 16 = 25$. Sie merken: Die Architekten benutzen nicht meinen Satz, sondern seine Umkehrung: Ist in einem Dreieck das Quadrat über einer Seite so groß wie die beiden Quadrate über den anderen Seiten zusammen, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Mein Satz ist eigentlich ein Satz der Geometrie. Er ist eigentlich ein Satz über Flächen. Er wird aber häufig benutzt, um in einer Sachsituation unbekannte Strecken zu bestimmen; dazu sieht man ein rechtwinkliges Dreieck in die Situation hinein, von dem man zwei Seiten kennt. Wir haben gerade schon gesehen, dass die Umkehrung meines Satzes zu einem Satz über Winkel wird. Dabei spielen besondere Zahlen eine Rolle: natürliche Zahlen, die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen. Solche drei Zahlen nennt man zu meinen Ehren ein Pythagoreisches Zahlentripel. Man kennt sie im Prinzip alle; d.h. es gibt eine Formel, nach der man alle Pythagoreischen Zahlentripel berechnen kann. Ein paar kleine und ein paar bemerkenswerte habe ich aufgelistet.

a	b	c	a^2	b^2	c^2
3	4	5	9	16	25
5	12	13	25	144	169
8	15	17	64	225	289
7	24	25	49	576	625
12	35	37	144	1225	1369
20	21	29	400	441	841
9	40	41	81	1600	1681
20	99	101	400	9801	10201
11	60	61	121	3600	3721
56	33	65	3136	1089	4225

Gleichungen, für die ganzzahlige Lösungen gesucht werden, wie z.B. bei den Pythagoreischen Zahlentripeln, nennt man auch diophantische Gleichungen. Diophantos von Alexandria war ein griechischer Mathematiker. Im Gegensatz zu mir ist nicht genau bekannt, wann er lebte. Die Angaben schwanken zwischen 100 vor Chr. und 350 nach Chr.. Über sein Leben weiß man so gut wie nichts. Bekannt ist, dass er ein 13bändiges Werk, die Arithmetica, verfasst hat. Sechs Bände in Griechisch hat man im 15.Jahrhundert wiedergefunden, weitere vier Bände in arabischer Übersetzung im 20. Jahrhundert, drei sind noch verschollen.

Diophants Arithmetica waren nach ihrer Wiederentdeckung Pflichtlektüre bei den Mathematikern. Im Jahr 1637 schrieb Pierre de Fermat bei der Lektüre der lateinischen Übersetzung der Arithmetica neben den Satz des Pythagoras folgende Zeilen auf den Rand seines Buches:

„Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos eiusdem nominis fas est dividere. Cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.“


1607-1665

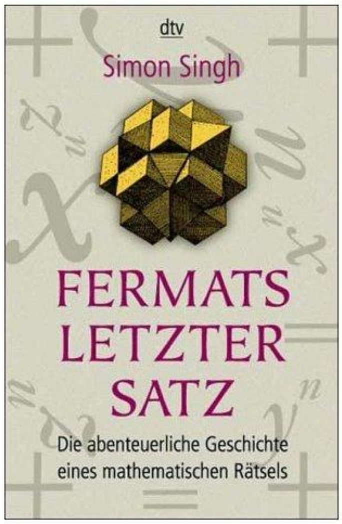
Auf deutsch:
„Es ist unmöglich, einen Kubus in zwei Kuben zu zerlegen, oder ein Biquadrat in zwei Biquadrate, oder allgemein irgendeine Potenz größer als die zweite in Potenzen gleichen Grades. Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, doch ist der Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

Kurz:

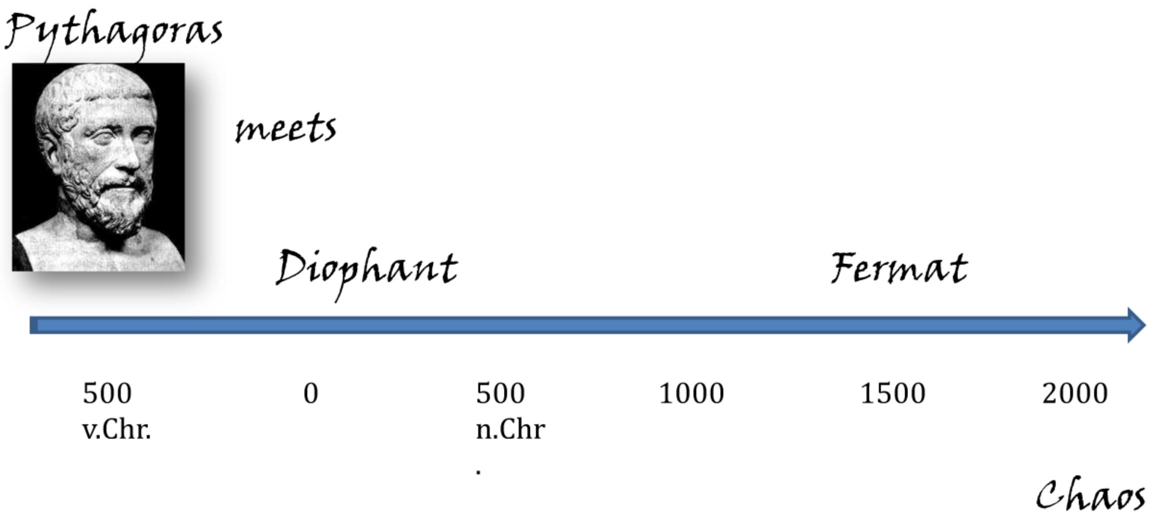
Die Gleichung $a^n + b^n = c^n$ besitzt für $n > 2$ keine ganzzahligen Lösungen.

Leider hat Fermat seinen „wunderbaren Beweis“ nirgendwo hingeschrieben und die Mathematiker der nachfolgenden Jahrhunderte haben sich die Zähne daran ausgebissen. Ein Gegenbeispiel hat aber auch niemand gefunden. Vielleicht wurde die Aussage deshalb auch der „Große Satz von Fermat“ genannt.

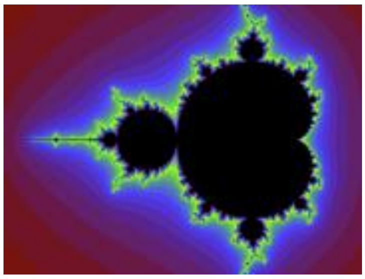
In Ihrer Zeit, wo eigentlich nur schlechte Nachrichten „good news“ sind, passiert es selten, dass eine mathematische Neuigkeit Eingang in die Presse findet. So war es Mitte der neunziger Jahre des 20. Jahrhunderts, als Andrew Wiles, ein britischer Mathematiker, einen Beweis vorlegte, der von den Berufskollegen, die ihn verstanden haben, vollständig akzeptiert wurde. Er umfasst 98 Seiten ohne Literaturverzeichnis. Das Bemerkenswerteste ist aber, dass er Zusammenhänge zwischen der Zahlentheorie und gänzlich anderen Teilgebieten der modernen Mathematik erschließt und nutzt. Was bleibt, ist das Geheimnis um Fermats „wunderbaren Beweis“.



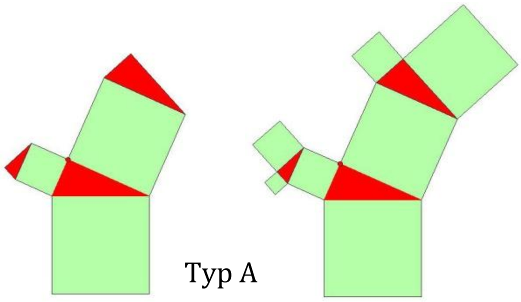
Nun sind wir in Ihrer Zeit angekommen.



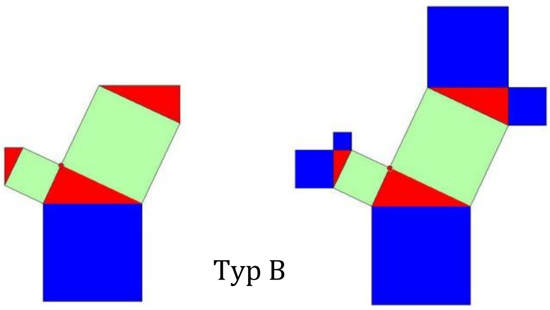
Eines der Theoriegebäude, das erst in den letzten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts entstanden ist, nennt sich Chaosforschung; die darin zuhause sind, nennen es lieber Theorie komplexer Systeme, weil es um Systeme geht, deren Dynamik so empfindlich von den Anfangsbedingungen abhängt, dass ihr Verhalten nicht langfristig vorhersagbar ist. Wetter, Verkehrsstaus und menschliches Verhalten sind bekannte Beispiele. Es gibt jedoch Struktur im Chaos und damit kommt Mathematik ins Spiel. Manche Strukturen lassen sich bildlich in phantastischen komplexen Mustern – den sogenannten Fraktalen – ausdrücken. Ein Kennzeichen von Fraktalen ist ihre Selbstähnlichkeit: sie bestehen aus unendlich vielen verkleinerten Abbildern ihrer selbst oder anders ausgedrückt: wenn man ein Teilstück abschneidet, so enthält es immer noch alle Bestandteile des Ganzen. Das wohl berühmteste Fraktal ist das „Apfelmännchen“, das 1979 von Benoit Mandelbrot entdeckt wurde.



Was ich damit zu tun habe? Es sollte Sie eigentlich nicht verwundern, dass ich noch immer so aktuell bin wie vor 2500 Jahren. Es gibt tatsächlich nach mir benannte Fraktale und die entstehen so: Betrachte jedes Kathetenquadrat als neues Hypotenusenquadrat, d.h. setze ein rechtwinkliges Dreieck auf, das zum alten ähnlich ist. Das geht auf zwei Weisen, je nachdem wie man das Dreieck aufsetzt, im gleichen Uhrzeigersinn oder entgegengesetzt.



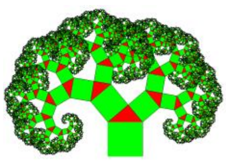
Typ A



Typ B

Zeichne die neuen Kathetenquadrate, setze wieder ähnliche rechtwinklige Dreiecke auf, usw. Übrigens: Nach meinem Satz haben die Kathetenquadrate jeder neuen Generation zusammen immer denselben Flächeninhalt wie das erste Hypotenusenquadrat. Also hat das Fraktal insgesamt einen unendlich großen Flächeninhalt, obwohl es auf ein Blatt Papyrus passt.

Es entstehen faszinierende Bilder, je nachdem wie groß man die Winkel an der Hypotenuse wählt. (http://math-www.uni-paderborn.de/~rinkens/veranst/elgeo2001/)



Typ A erinnert bei einem Winkel von 40° an einen Broccoli, womit wir uns langsam den bevorstehenden Festtagen nähern.

Mit Typ B bei einem Winkel von 30° verabschiede ich mich für heute.

Ihr Pythagoras